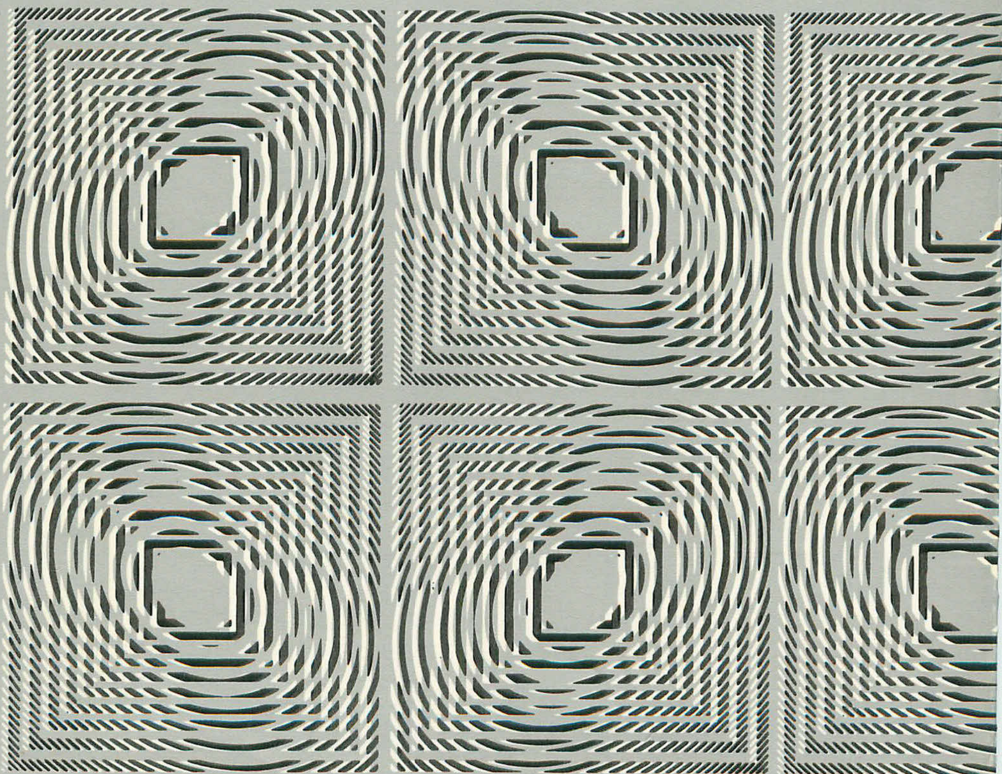
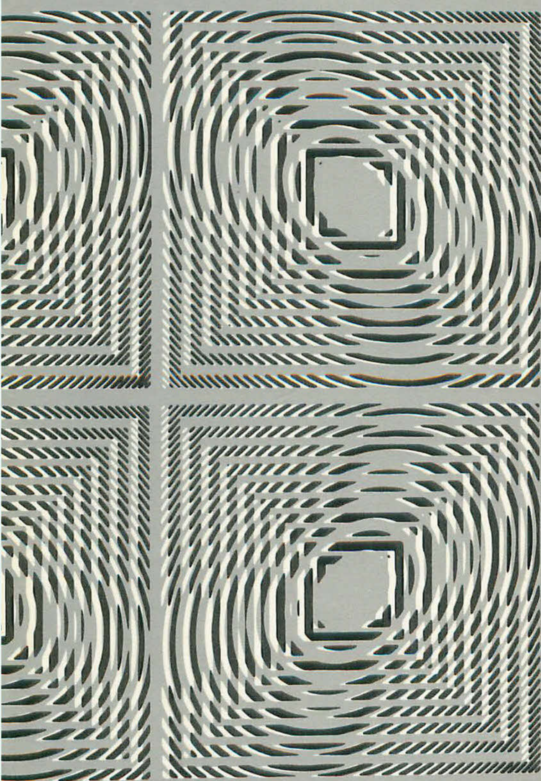
原子力工学シリーズ 1

原子炉構造工学

宮 健三・矢川元基 著



東京大学出版会



原子力工学シリーズ　1

原子炉構造工学

宮 健三・矢川元基 著

東京大学出版会

まえがき

原子炉を設計する上で，また原子炉の安全性を議論する上で，原子炉構造工学の重要性はこのところとみに高まる一方である．例えばこの数年，米国の軽水型原子力発電所で配管系にクラックが次々と発見され冷却水の漏洩事故を起こした．その後わが国においても同種類の欠陥が発見され，それをきっかけとして原子力発電所の安全性について新たな論議を引き起こしている．幸いなことにいずれも大事には到らずに済んでいるが，このような予想しないクラックが発生することの究明，あるいはこの種のクラックが存在したときに，配管のカタストロフィックな大破断に到ることに関する安全裕度はどの程度であるかを推定するのには，従来の学問領域の枠を越えた総合的な研究蓄積が要求される．また原子炉のように，従来の機器類とは異なる過酷な環境下における構造物をさらに安全に稼動させるためには，従来とは比較にならない高度な設計解析も要求されよう．このようなことから原子炉構造工学という工学の新しい境界領域の重要度が，原子炉プラントの実際の設計や運転の実績が積まれるにつれて，ますます高まってきたわけである．

以上のように，原子炉構造工学が原子力工学においてかなりのウェイトを占めているにもかかわらず，この方面におけるまとまった教科書あるいは参考書はいまだ著わされていない．幸いにも筆者らはこの方面の教育研究に大学院時代も含めて約10年の間携わることができ，この領域の広範さと深さを垣間見てきた．しかしこのような原子炉構造工学の全容を200ページ前後の書物にまとめることはほとんど不可能に近く，したがって本書では大学学部3, 4年生，会社や研究所でこの方面の仕事に従事している若手技術者および研究者を対象として，最低限度必要と思われる基礎知識を中心に記述することを念頭においた．

本書は6章から成り，第1章ではこの方面の工学基礎としての固体力学につ

いて概要を述べる．第2章ではこのところ急速に発展し原子炉構造工学の各方面での応用が見られる有限要素法について，その基本的事項を説明する．第3章では原子炉構造の安全性を論ずる上で不可欠な破壊力学の基礎について述べる．第4章では原子炉の構造設計の実際について現在最もひんぱんに引用されるASME コードを中心に解説を行なう．第5章では高温型の原子炉である高速炉や高温ガス炉などを対象とした高温構造解析法について紹介する．最後に第6章においては原子炉構造の溶接施工など，原子炉製作面からの概要を述べる．なお各章はいちおう独立した形で書かれているので場合によっては必要な章のみを選択して読むことも可能である．また，このシリーズの中で原子力プラントの構造設計に関するものが別に刊行予定であり，あわせて参考にされることをお奨めする．

最後に，筆者らの恩師である東京大学工学部原子力工学科の安藤良夫教授，本書の執筆の機会を与えられた同学科の関口晃教授，および執筆に際し多大のお世話をいただいた東京大学出版会の山田隆三氏に厚く感謝する．

1976年　初秋

矢川元基
宮　健三

目　　次

3. 原子炉構造物の破壊現象

4. 原子炉構造設計

1. 固体力学概論

原子炉構造工学を学ぶ際に最も基本となるのは，固体力学の知識である．固体力学の膨大な内容を単に一つの章で説明するのはとうてい不可能であり，ここではその一端を簡単に紹介するにとどめる．なお，読者は材料力学の基礎的知識を，一応備えているものと考えた．

1.1 微小変形弾性問題の構成

ここではまず三次元の直交デカルト座標系を用いた場合の，微小変形弾性問題の構成について考えよう．

1.1.1 平衡方程式

すでに材料力学において学んだように応力は対称条件

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji};\ i,j=1,2,3$$

のもとで9個の成分 $\sigma_{ij};i,j=1,2,3$ で表現される．すなわち対称条件を考慮すると，独立な応力の成分は6個ということができる．応力に関する平衡方程式を求めるために，しばしば**図 1.1.1** のような微小平行六面体が用いられる．図において細い矢印は面に作用する力であり，太い矢印は物体力を意味する．物体がつりあうためには合力が0となる必要がある．たとえば，x_1 方向の力を考えると，表面力の6成分と物体力の1成分があり，和を採ると

$$\begin{aligned}&\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3-\sigma_{11}dx_2dx_3+\left(\sigma_{21}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_3dx_1\\&\quad-\sigma_{21}dx_3dx_1+\left(\sigma_{31}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2-\sigma_{31}dx_1dx_2\\&\quad+\bar{F}_1dx_1dx_2dx_3=0\end{aligned}$$

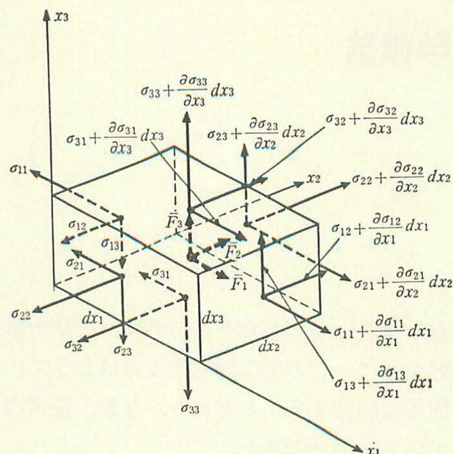


図 1.1.1 微小六面体に作用する応力

となり，$dx_1dx_2dx_3$ で割れば

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+\bar{F}_1=0$$

が得られる．x_2, x_3 方向についても同様に考えると

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}+\bar{F}_2=0$$

および

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+\bar{F}_3=0$$

となる．以上をまとめると，応力の平衡方程式は

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0,\ i,j=1,2,3 \qquad (1.1.1)^*$$

と書くことができる．

* 重なって用いられる添え字は繰返しを表す．すなわち

$$\sigma_{ij,j}=\sigma_{i1,1}+\sigma_{i2,2}+\sigma_{i3,3}$$

である．

1.1.2 ひずみ–変位の関係

変形前に座標(x_1, x_2, x_3)を占める物体中のある点Pがベクトル量$\boldsymbol{u}(u_1, u_2, u_3)$だけ変形後，座標$(x_1+u_1, x_2+u_2, x_3+u_3)$の点P*に移るとき，$u_1, u_2, u_3$を変位と呼ぶ．点Pから$ds(=\sqrt{dx_1{}^2+dx_2{}^2+dx_3{}^2})$だけ離れた点Qは変形後，

点 Q* に移り，その座標は

$$\left(x_1+dx_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}dx_3,\right.$$

$$x_2+dx_2+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}dx_3,$$

$$\left.x_3+dx_3+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}dx_3\right)$$

と書くことができる(図 **1.1.2**)．また P*Q* $(=ds^*)$ は

$$ds^* = \left[\left\{\left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)dx_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}dx_3\right\}^2 + \left\{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1+\left(1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)dx_2+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}dx_3\right\}^2 + \left\{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}dx_2+\left(1+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)dx_3\right\}^2\right]^{1/2}$$

となる．ここで P から Q へ向かうベクトルの方向余弦を (l_1, l_2, l_3) とすれば

$$dx_i = l_i ds \tag{1.1.2}$$

となる．さて P, Q 間の直ひずみ ε は

$$\varepsilon = \frac{ds^*-ds}{ds} \tag{1.1.3}$$

で与えられるから，上式を代入して

$$\varepsilon = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}l_1^2+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}l_2^2+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}l_3^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)l_1l_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)l_2l_3+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)l_3l_1 \tag{1.1.4}$$

となる．ここで変位の微分は 1 に比べて小さいことを用いた．

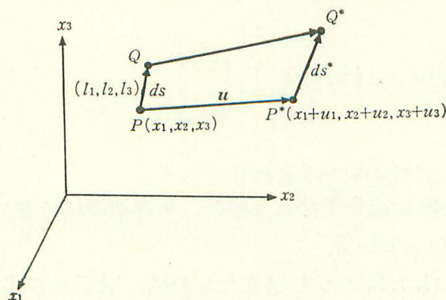


図 **1.1.2** 物体の変形

なお，ここで，

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\ \varepsilon_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),$$

$$\varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right),$$

および

$$\varepsilon_{31}=\varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$

あるいは

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{1.1.5}$$

のようにひずみ成分 ε_{ij} を定義すると(1.1.4)は

$$\varepsilon=\varepsilon_{11}l_1{}^2+\varepsilon_{22}l_2{}^2+\varepsilon_{33}l_3{}^2+2\varepsilon_{12}l_1l_2+2\varepsilon_{23}l_2l_3+2\varepsilon_{31}l_3l_1 \tag{1.1.6}$$

と書くことができる.

なお $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ を直ひずみ，$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$ をせん断ひずみと呼ぶ.

(1.1.5)を2回偏微分すれば

$$\varepsilon_{ij,kl}=\frac{1}{2}(u_{i,jkl}+u_{j,ikl})$$

指標を交換すれば

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kl,ij}&=\frac{1}{2}(u_{k,lij}+u_{l,kij})\\ \varepsilon_{jl,ik}&=\frac{1}{2}(u_{j,lik}+u_{l,jik})\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

および

$$\varepsilon_{ik,jl}=\frac{1}{2}(u_{i,kjl}+u_{k,ijl})$$

これらから

$$\varepsilon_{ij,kl}+\varepsilon_{kl,ij}-\varepsilon_{jl,ik}-\varepsilon_{ik,jl}=0 \tag{1.1.8}$$

が導かれる.（1.1.8)を適合条件式と呼び，単連結領域で変位 u_i が一価関数として決まる条件となっている.

ε_{ij} の対称性から(1.1.8)のうち独立なものは，以下の6式だけであることが容易にわかる.

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{11,23} = (-\varepsilon_{23,1}+\varepsilon_{31,2}+\varepsilon_{12,3})_{,1}\\
&\varepsilon_{22,31} = (-\varepsilon_{31,2}+\varepsilon_{12,3}+\varepsilon_{23,1})_{,2}\\
&\varepsilon_{33,12} = (-\varepsilon_{12,3}+\varepsilon_{23,1}+\varepsilon_{31,2})_{,3}\\
&2\varepsilon_{12,12} = \varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}\\
&2\varepsilon_{23,23} = \varepsilon_{22,33}+\varepsilon_{33,22}
\end{aligned}
\tag{1.1.9}
$$

および

$$2\varepsilon_{31,31} = \varepsilon_{33,11}+\varepsilon_{11,33}$$

1.1.3 応力-ひずみの関係

弾性体においては応力 σ_{ij} とひずみ ε_{ij} との間に次の関係がある.

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{1.1.10}$$

あるいは

$$\varepsilon_{ij} = B_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{1.1.11}$$

これらはフック (Hooke) の法則と呼ばれる. 等方性弾性体を考えると (1.1.10), (1.1.11) はそれぞれ

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1-2\nu)}\varepsilon\delta_{ij}+2G\varepsilon_{ij}' \tag{1.1.12}$$

および

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1-2\nu)}{E}\sigma\delta_{ij}+\frac{1}{2G}\sigma_{ij}' \tag{1.1.13}$$

と表される.

ここに E, ν, G はそれぞれヤング (Young) 係数, せん断弾性係数, ポアソン (Poisson) 比と呼ばれ

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.1.14}$$

の関係がある. また δ_{ij} はクロネッカ (Kronecker) のデルタであり $\delta_{ij}=1\,(i=j)$, $=0\,(i\neq j)$ である. 更に

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii},\quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii} \tag{1.1.15}$$

$$\varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij}-\varepsilon\delta_{ij},\quad \sigma_{ij}' = \sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij} \tag{1.1.16}$$

である. なお $\varepsilon_{ij}', \sigma_{ij}'$ はそれぞれ偏差ひずみ, 偏差応力と呼ばれる.

次に境界条件として次の2種類のものを考える. **図 1.1.3** に示すように, 境界は S_σ と S_u とから構成される.

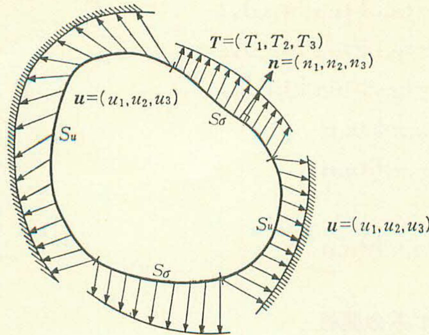


図**1.1.3** 物体の境界条件

1.1.4 力学的境界条件

この境界条件は

$$T_i = \bar{T}_i \quad (S_\sigma \text{上}) \tag{1.1.17}$$

と書かれる．ここに n_i を境界に外向きに立てた単位結線ベクトルとすれば

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \tag{1.1.18}$$

と定義される．(1.1.17)は境界 S_σ 上で内力 T_i が，与えられた外力 T_i に設定されることを意味する．

1.1.5 幾何学的境界条件

この境界条件は

$$u_i = \bar{u}_i \quad (S_u \text{上}) \tag{1.1.19}$$

と書かれる．この式は境界 S_u 上で u_i が，与えられた変位 $\bar{u}_i$ に設定されることを意味する．

1.2 材料の非線形な力学的性質

構造物を構成する各種の材料の力学的性質のうちで基本的なものは，前節でも触れた弾性変形であり，フックの法則によって記述される．しかし，応力が高くなると，一般の金属などでは材料が降伏し，いわゆる塑性挙動を示す．また，原子炉においては高温状態で使用されることが多く，その場合にはクリープ挙動が重要となる．本節では，材料の非線形な力学的性質の代表例として以

下に塑性挙動とクリープ挙動とについて簡単に概要を説明する．

1.2.1　塑性挙動

金属材料などに応力が生じ，永久変形(塑性変形)が現れるために必要な条件のことを降伏条件と呼ぶ．この条件は，等方性材料の場合，座標変換に対して不変であることから

$$f(J_1, J_2, J_3) = C \tag{1.2.1}$$

と書くことができる．ここに J_1, J_2, J_3 は，それぞれ応力不変量の1次，2次，3次の成分であり，主応力 σ に関する三次方程式の係数となっている．すなわち

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0 \tag{1.2.2}$$

また，J_1, J_2, J_3 は応力成分 σ_{ij} と

$$J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$J_2 = -(\sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{11}\sigma_{22}) + \sigma_{23}{}^2 + \sigma_{31}{}^2 + \sigma_{12}{}^2 \tag{1.2.3}$$

および

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}{}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}{}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}{}^2 + 2\sigma_{23}\sigma_{31}\sigma_{12}$$

の関係がある．

(1.2.1)において，初期降伏条件では C は定数であるが，その後の降伏状態では C はひずみ履歴の関数となる．

次に，金属材料においては，降伏は応力の静水圧成分に無関係であることが知られており，降伏条件は(1.2.1)の代りに

$$f(J_2', J_3') = C \tag{1.2.4}$$

と表すことができる．ここに

$$J_2' = -(\sigma_{22}'\sigma_{33}' + \sigma_{33}'\sigma_{11}' + \sigma_{11}'\sigma_{22}') + \sigma_{23}'^2 + \sigma_{31}'^2 + \sigma_{12}'^2$$

および

$$J_3' = \begin{vmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & \sigma_{31}' \\ \sigma_{12}' & \sigma_{22}' & \sigma_{23}' \\ \sigma_{31}' & \sigma_{23}' & \sigma_{33}' \end{vmatrix} \tag{1.2.5}$$

である．上式において σ_{ij}' は応力の偏差成分であり

$$\sigma_{ij}{}' = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\delta_{ij} \tag{1.2.6}$$

と定義される．ここに δ_{ij} はクロネッカのデルタであり $\delta_{ij}=1(i=j), =0(i\neq j)$ の関係がある．

(1.2.4)の特別な場合として

$$f=\sqrt{3J_2{}'}=\bar{\sigma} \tag{1.2.7}$$

と置いたものをミーゼス(Mises)の降伏条件と呼ぶ．ここに $\bar{\sigma}$ は相当応力であり，単軸状態の材料挙動と比較するために用いられる量を意味する．すなわち $\bar{\sigma}$ が材料の単軸引張状態の降伏応力 Y に等しくなったとき降伏するものと考える．

一方，トレスカ(Tresca)の降伏条件では，主応力を $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ としたとき

$$|\sigma_1-\sigma_2|,\quad |\sigma_2-\sigma_3|,\quad |\sigma_3-\sigma_1|$$

のうちのどれかが Y に等しくなったとき降伏するものと考える．$\sigma_3=0$ の場合についてミーゼスとトレスカの降伏条件は図 **1.2.1** のようになる．数値計算上はミーゼスの条件がトレスカの条件より多少複雑であるが，多くの実験は前者によく一致するため最近はもっぱらミーゼスの降伏条件のほうが用いられる傾向にある．

次に，塑性ポテンシャルについて説明する．いま，降伏条件を

$$f(\sigma_{ij})=C \tag{1.2.8}$$

と置いたとき，塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}{}^{(p)}$ は

$$d\varepsilon_{ij}{}^{(p)} = h\frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}df \tag{1.2.9}$$

と書くことができる．ここに, h は正のスカラ量である．このような関数 $f(\sigma_{ij})$

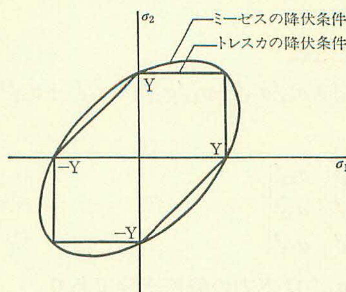


図 **1.2.1**　降伏面の例

のことを塑性ポテンシャルと呼ぶ.

(1.2.9)の h を求めるにはひずみ硬化仮説を導入する. すなわち塑性仕事増分を

$$dW^{(p)} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}{}^{(p)} = \sigma_{ij} h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df \tag{1.2.10}$$

と決め, (1.2.8)の C を $W^{(p)} = \int dW^{(p)}$ の関数とすると

$$f(\sigma_{ij}) = F(W^{(p)}) \tag{1.2.11}$$

次に $dW^{(p)}$ を

$$dW^{(p)} = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^{(p)} \tag{1.2.12}$$

と表す. ここに, $d\bar{\varepsilon}^{(p)}$ は相当塑性ひずみ増分である. $f = \bar{\sigma}$ であるから, (1.2.11), (1.2.12)から

$$\bar{\sigma} = F\left(\int \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^{(p)}\right) \tag{1.2.13}$$

すなわち

$$\bar{\sigma} = H\left(\int d\bar{\varepsilon}^{(p)}\right) \tag{1.2.14}$$

の関係が成り立つ. $\bar{\sigma}$ と $\int d\bar{\varepsilon}^{(p)}$ との関係を求めると

$$H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^{(p)}} \tag{1.2.15}$$

は $\bar{\sigma}$-$\int d\bar{\varepsilon}^{(p)}$ 曲線の勾配を表す. これは単軸引張試験における応力－塑性ひずみ曲線のひずみ硬化率に対応している.

(1.2.15)を(1.2.10)に代入すると

$$dW^{(p)} = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^{(p)} = \sigma_{ij} h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} H' d\bar{\varepsilon}^{(p)} \tag{1.2.16}$$

ここに(1.2.12)を用いた. これから

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} H' \tag{1.2.17}$$

となる. ミーゼスの降伏条件式(1.2.7)を用いると

$$\sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \bar{\sigma} \tag{1.2.18}$$

となることが示されるので, (1.2.17)から

$$\frac{1}{h}=H' \tag{1.2.19}$$

を得る．したがって，(1.2.19)を(1.2.9)に代入して

$$d\varepsilon_{ij}{}^{(p)}=\frac{1}{H'}\frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}df \tag{1.2.20}$$

の関係を得る．上式から，材料の単軸引張応力－ひずみ曲線が実験によって与えられれば，塑性ひずみ増分が計算されることになる．

さて，材料が塑性状態にあるとすれば，(全)ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ は

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}{}^{(e)}+d\varepsilon_{ij}{}^{(p)} \tag{1.2.21}$$

と書き表される．弾性ひずみに対するフックの法則は(1.1.10)から

$$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}{}^{(e)}d\varepsilon_{kl}{}^{(e)} \tag{1.2.22}$$

と書かれるから，(1.2.21)，(1.2.22)から $d\varepsilon_{ij}{}^{(e)}$ を消去すると

$$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}{}^{(e)}d\varepsilon_{kl}-D_{ijkl}{}^{(e)}d\varepsilon_{kl}{}^{(p)} \tag{1.2.23}$$

となる．更に，(1.2.20)を(1.2.23)に代入すると

$$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}{}^{(e)}d\varepsilon_{kl}-D_{ijkl}{}^{(e)}\frac{1}{H'}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}df \tag{1.2.24}$$

また，

$$df=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij} \tag{1.2.25}$$

と書くことができる．(1.2.24)を(1.2.25)に代入すると

$$df=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}D_{ijkl}{}^{(e)}d\varepsilon_{kl}-\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}D_{ijkl}{}^{(e)}\frac{1}{H'}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}df \tag{1.2.26}$$

上式を df について解けば

$$df=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}D_{mnrs}{}^{(e)}d\varepsilon_{rs}}{1+\dfrac{1}{H'}\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}D_{ijkl}{}^{(e)}\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}} \tag{1.2.27}$$

上式を(1.2.24)に代入すると，結局

$$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}{}^{(p)}d\varepsilon_{kl} \tag{1.2.28}$$

を得る．ここに

$$D_{ijkl}{}^{(p)}=D_{ijkl}{}^{(e)}-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}D_{mnkl}{}^{(e)}D_{ijpq}{}^{(e)}\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{pq}}}{H'+\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ab}}D_{abcd}{}^{(e)}\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{cd}}} \tag{1.2.29}$$

あるいは，(1.2.28)の代りに

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}{}^{(e)} d\varepsilon_{kl} - d\sigma_{ij}{}^{(p)} \tag{1.2.30}$$

ここに

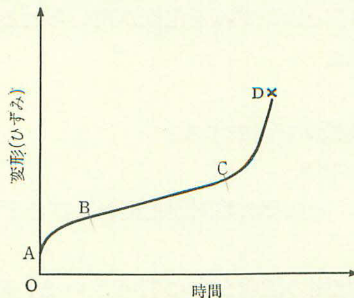
$$d\sigma_{ij}{}^{(p)} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnkl}{}^{(e)} D_{ijpq}{}^{(e)} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}}{H' + \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} D_{abcd}{}^{(e)} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{cd}}} d\varepsilon_{kl} \tag{1.2.31}$$

1.2.2　クリープ挙動

応力(荷重)が一定のままでも，変形が時間とともに進行する現象をクリープ(creep)と呼ぶ．金属材料では，室温域においてはそれほど考慮する必要はないが，原子炉構造のように高温状態で使用される場合には，しばしば設計上重要となる．

なお，変形が一定で応力(荷重)が時間とともに減少する状態をリラグゼーション(relaxation)と呼ぶ．

通常のクリープ試験においては，一定温度下で，一定引張荷重を与えて時間と変形との関係を調べて**図1.2.2**のように結果を表す．これをクリープ曲線と呼び，同材料について温度と応力を変化させて数多くの実験を行う．図1.2.2は，荷重を与えた瞬間にOAだけ変形し，その後ABのようにクリープ速度が減少しながら変形が増えることを示している．BCの部分においてはその傾きはほぼ一定であり，CDにおいてはクリープ速度は増大する．AB, BC, CDの部分をそれぞれ一次クリープ(または遷移クリープ)，二次クリープ(または定常クリープ)，三次クリープ(または加速クリープ)といい，BCにおけるひずみ速度を最小クリープ速度または定クリープ速度という．また図のD点は破



BC… 変形がconst.

図1.2.2　一定応力・一定温度条件下でのクリープ変形

断点を表す.

クリープひずみ速度$\dot{\varepsilon}$と時間tの関係は，一次クリープについて

$$\dot{\varepsilon}=\beta t^{-p}\quad(\beta, p\text{ は定数})\tag{1.2.32}$$

また一次と二次クリープについて

$$\dot{\varepsilon}=v_0+ce^{-\alpha t}\quad(v_0, c, \alpha\text{ は定数})\tag{1.2.33}$$

あるいは

$$\dot{\varepsilon}=\beta t^{-n}+\kappa\quad(\beta, n, \kappa\text{ は定数})\tag{1.2.34}$$

などと表現される.

また，クリープひずみ速度と応力σとの関係は，一次と二次クリープについて

$$\dot{\varepsilon}=C\sigma^n\tag{1.2.35}$$

$$\dot{\varepsilon}=C(e^{k\sigma}-1)\tag{1.2.36}$$

あるいは

$$\dot{\varepsilon}=C\sinh(k\sigma)\tag{1.2.37}$$

などと表される．ここにC, n, kは定数である.

クリープひずみ速度と温度Tとの関係は，C, kを定数として

$$\dot{\varepsilon}=Ce^{-k/T}\tag{1.2.38}$$

と，しばしば表される.

応力と時間とを含むクリープ式としては，一次および二次クリープについて

$$\varepsilon=B\sigma^n t^m\quad(B, n, m\text{ は定数})\tag{1.2.39}$$

などがある.

このようにして求められたクリープ式を変動応力状態に対して拡張する方法としては，時間硬化則あるいはひずみ硬化則が用いられる．(1.2.39)について考えると，クリープ速度は

$$\dot{\varepsilon}=mB\sigma^n t^{m-1}\tag{1.2.40}$$

(1.2.39)，(1.2.40)から時間tを消去すると

$$\dot{\varepsilon}=mB^{1/m}\sigma^{n/m}\varepsilon^{1-1/m}\tag{1.2.41}$$

(1.2.40)と(1.2.41)とを，それぞれ時間硬化則およびひずみ硬化則によるクリープひずみ速度と呼ぶ.

図 1.2.3 を用いて両硬化則の説明を次に行う．いま，時刻t_1まで応力がσ_1で，その後σ_2に変動したものとする．時刻t_1に至るまでのクリープひずみは

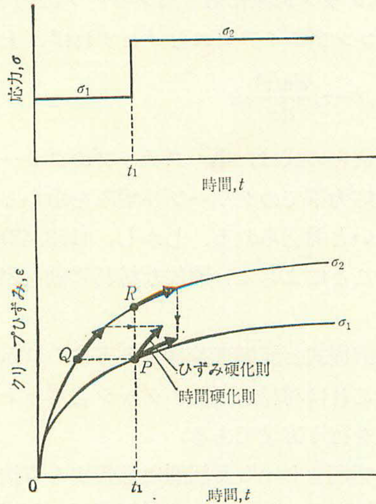


図 1.2.3　変動応力条件下のクリープひずみ

図 1.2.3 下図の応力 σ_1 に対するクリープ曲線 OP の経路をたどる．点 P において応力が σ_2 に増加したとすれば，おそらくひずみ速度は不連続的に増加することが予想される．時間硬化則によれば，点 P からのクリープひずみの増加のようすは，応力 σ_2 に対するクリープ曲線上の，時刻 t_1 における点 R から出発する σ_2 曲線と一致する．一方，ひずみ硬化則では，P 点と同じクリープひずみ位置 Q から出発する σ_2 曲線と一致する．一般には，ひずみ硬化則のほうが実験とよく一致する．

以上に示したクリープ関係式は，クリープひずみがある瞬間だけの応力や時間に依存すると考えるので，状態方程式 (equation of state) に基づくクリープ関係式と呼ばれる．これに対して履歴理論 (hereditary theory) による関係式も考えられる．この理論は記憶理論 (memory theory) とも呼ばれており，ボルツマン (Boltzmann) の重畳原理とボルテラ (Volterra) の材料状態の履歴表現法に基づいている．この方法によると，ある時刻 t における材料挙動は，過去のすべての状態に依存するということになる．この種のクリープ式のうち，最も簡単なものは次式のように書くことができる．

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial C(\sigma, t-\tau)}{\partial\sigma}\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{1.2.42}$$

ここに $C(\sigma, t)$ は単一ステップ荷重に対するクリープ曲線を表す．応力レベル σ に対するクリープ・コンプライアンスを J とすれば，上式は

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t} J(\sigma, t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{1.2.43}$$

と書き換えられる．これらの式は，単一ステップのクリープ・データを重畳することによって，変動応力下でのクリープひずみを求めるものであり，線形な材料に対してだけ正しいと考えられる．しかし，(1.2.42)あるいは(1.2.43)に応力の高次項を加えることによって，複雑な材料挙動を表現することも可能である．

以上に述べた，状態方程式と履歴理論による方法のほかに，粘弾塑性体としてのモデル化もある．これは材料をばね，ダッシュポットおよびスライダの組合せによってモデル化を行う方法である．

なお，単軸のクリープ則を２～３軸状態に拡張する方法としては，塑性変形の場合に用いられる塑性ポテンシャル的な考え方が，しばしば応用される．

1.3 二次元弾性問題

構造物は一般にどのようなものでも，厳密には三次元体の拡がりを有する連続体と考えることができる．しかし，1.1節で示したような一連の方程式を三次元体として取り扱うことはしばしば問題をむずかしくするばかりか，問題の本質をとらえにくくすることが多い．そのために個々の構造物に応じて独立変数のうち，真に重要なものだけを残してゆくことによって問題を単純化，あるいはモデル化するという手法が採られる．ここではその一例として，しばしば実際上も重要な二次元弾性問題について述べる．

1.3.1 平面応力状態

これは薄い板を想定し，その面内だけに荷重が中央面に対称に与えられるような状態のことをいう(図 **1.3.1** 参照)．この場合の応力状態は物体のいたるところで

$$\sigma_{zz}=\sigma_{zx}=\sigma_{zy}=0 \tag{1.3.1*}$$

残りの応力成分 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ は z に無関係である．ひずみ成分はフックの法則

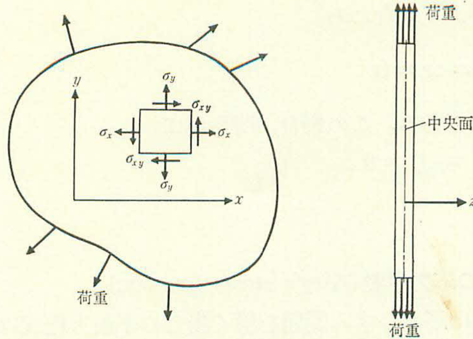


図 1.3.1 平面応力状態

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx})$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{1.3.2}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\sigma_{xy}$$

および

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = 0$$

から求められる．これから $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ は

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \tag{1.3.3}$$

⟹ 2年のノート参照

および

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}$$

となる．

* 応力成分などに用いられる添え字の 1, 2, 3 を，ここでは x, y, z と置いたことに注意.

1.3.2 平面ひずみ状態

変位の z 方向成分 w が零で，変位 u, v が z に無関係となるような状態を平

面ひずみ状態と呼ぶ．すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=w=0 \tag{1.3.4}$$

が要求される条件である．この場合，明らかに

$$\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{zy}=0 \tag{1.3.5}$$

である．

1.3.3 エアリの応力関数(Airy's stress function)

平面応力あるいは平面ひずみ問題を解く場合の平衡方程式は，物体力がない場合

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}=0$$

および　　(1.3.6)

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}=0$$

と表される．さて(1.3.6)を恒等的に満足する応力成分は，ある任意関数 $F(x,y)$ を用いて

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad \sigma_{yy}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\quad \text{および}\quad \sigma_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{1.3.7}$$

と書くことができる．したがって $F(x,y)$ のうち適合条件式と境界条件式を満足するものが真の解を与える．平面応力状態を表わす(1.3.2)に(1.3.7)を代入し，(1.1.9)の第4式を用いると

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0 \tag{1.3.8}$$

が得られる．適当な境界条件のもとに重調和方程式(1.3.8)を解いて F が決められると，応力分布が(1.3.7)から求まる．更に(1.3.2)からひずみ分布が決まり(1.1.5)から変位分布も求められる．以上で述べた F のことをエアリ(Airy)の応力関数と呼ぶ．

さて，Φ_1, Ψ_1 などを調和関数としたとき一般に重調和関数は

$$F=x\Phi_1+\Psi_1,\quad F=y\Phi_2+\Psi_2,\quad F=(x^2+y^2)\Phi_3+\Psi_3 \tag{1.3.9}$$

の形に表現できる．また重調和関数の和は重調和関数である．

1.4　板殻問題

二次元問題(平面問題あるいは面内問題)とともに薄肉構造物に対して適用される代表的な構造モデル化に曲げの問題(面外問題)がある．ここでは，まず平板の曲げ理論について述べ，次に殻理論について円筒殻を例に採って簡単に触れる．

1.4.1　平板の曲げ理論

薄い平板の曲げ理論としてもっぱら引用されるものはキルヒホッフ(Kirchhoff)の曲げ理論と呼ばれるものである．この場合，次の仮定が設けられる．

“変形前に中央面に垂直であった線分は変形後もその中央面に垂直であり，その方向にひずみを生じない．”

たとえば，**図 1.4.1** において u^*, v^*, w^* をそれぞれ平板の任意点(x, y, z)における x, y, z 軸方向の変位とすれば，上の仮定から

$$u^* = u - z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v^* = v - z\frac{\partial w}{\partial y}, \quad w^* = w \tag{1.4.1}$$

が得られる．ここに u, v, w はそれぞれ中央面 $z=0$ における x, y, z 方向の変位である．(1.4.1)と(1.1.5)とからひずみ成分は

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

および　(1.4.2)

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$$

と計算される．ここに最初の仮定を用いた．応力－ひずみ関係としては平面応

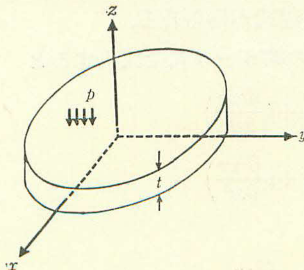


図 1.4.1　面外力 p を受ける薄い平板

力状態を仮定する．したがって(1.4.2)を(1.3.3)に代入して

$$\sigma_{xx}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)-z\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_{yy}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)-z\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{1.4.3}$$

および

$$\sigma_{xy}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-z\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

を得る．次に合応力とモーメントを以下のように定義する．

$$N_x=\int\sigma_{xx}dz,\ \ N_y=\int\sigma_{yy}dz,\ \ N_{xy}=\int\sigma_{xy}dz,$$

$$Q_x=\int\sigma_{zx}dz,\ \ Q_y=\int\sigma_{zy}dz, \tag{1.4.4}$$

$$M_x=\int\sigma_{xx}zdz,\ \ M_y=\int\sigma_{yy}zdz\quad \text{および}\quad M_{xy}=\int\sigma_{xy}zdz$$

ここに，積分範囲は $-t/2\leq z\leq t/2$ (t：板厚)である．これらの合応力とモーメントとの間の関係は図 **1.4.2** において微小六面体の力とモーメントとのつりあいから求めることができ

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0,\ \ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=p \tag{1.4.5}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=Q_x\quad \text{および}\quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}=Q_y$$

と表される．ここに，z 方向の圧力は中央面に働くものと仮定する．

(1.4.3)を(1.4.4)の第1～3式に代入し，得られた式を更に(1.4.5)に代入すると u, v だけの微分方程式が得られる．

また(1.4.3)を(1.4.4)の第6～8式に代入すると

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{1.4.6}$$

および

$$M_{xy}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

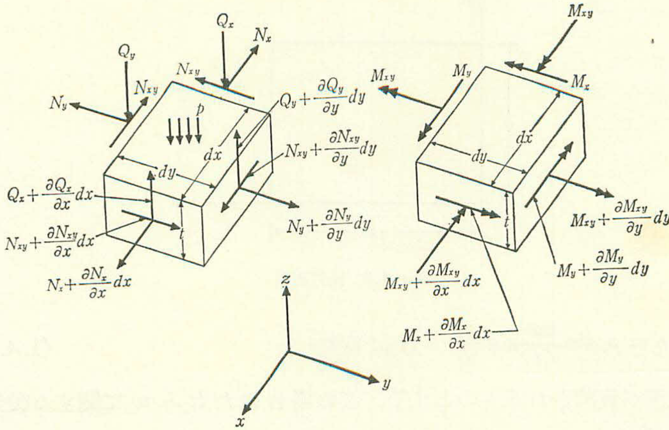


図 **1.4.2** 微小六面体に作用する合応力とモーメント

・力はすべて単位長さあたり（ふちの）厚さ方向はすべて積分にあるから。

を得る．ここに，D は曲げ剛性であり

$$D=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \tag{1.4.7}$$

である．(1.4.6)を(1.4.5)の第4，5式に代入し，更に第3式から Q_x と Q_y とを消去すると，結局

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+p=0 \tag{1.4.8}$$

の関係を得る．

以上から，面内変位 u, v と面外変位 w とはそれぞれ独立に求められることになる．なお，この場合の面内問題は二次元弾性論と一致する．また面外問題は(1.4.8)と適当な境界条件とを用いて解かれる．この場合の境界条件としては，たとえば $x=$一定の辺で以下のようなものが考えられる．

(1) 固定辺　$w=0$　および　$\frac{\partial w}{\partial x}=0$

(2) 支持辺　$w=0$　および　$M_x=0$　(1.4.9)

(3) 自由辺　$M_x=0$　および　$Q_x+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=0$

$Q_x+\partial M_{xy}/\partial y$ のことを等価合せん断応力と呼ぶ．

【例】 正弦波状の面外荷重を受ける単純支持の長方形板

図 1.4.3 に示されるような長方形板を考えて，

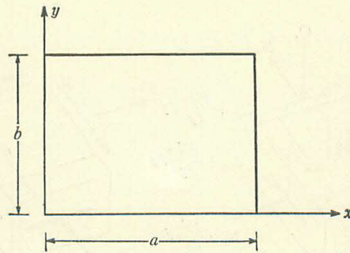


図 1.4.3　長方形板

$$p = p_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \quad (p_0 : \text{定数}) \tag{1.4.10}$$

の面外荷重が負荷されるものとする．この場合のたわみ w に関する微分方程式は(1.4.8)から

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{p_0}{D}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} = 0 \tag{1.4.11}$$

と表される．また境界条件は(1.4.9)から

$$\left\{\begin{array}{lll} w = 0 & \text{および} & M_x = 0 \quad (x = 0, a \text{ 上}) \\ w = 0 & \text{および} & M_y = 0 \quad (y = 0, b \text{ 上}) \end{array}\right. \tag{1.4.12}$$

である．(1.4.6)を用いると(1.4.12)はまた

$$\begin{array}{lll} w = 0 & \text{および} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, a \text{ 上}) \\ w = 0 & \text{および} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (y = 0, b \text{ 上}) \end{array} \tag{1.4.13}$$

となる．ここに境界では $w=0$ であるから x, y 軸に平行な辺上ではそれぞれ $\partial^2 w/\partial x^2=0$, $\partial^2 w/\partial y^2=0$ となることを用いた．

(1.4.13)を満たす解としては

$$w = C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \tag{1.4.14}$$

を考えればよい．ここで，C を決定するために(1.4.14)を(1.4.11)に代入すれば

$$\pi^4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 C + \frac{p_0}{D} = 0 \tag{1.4.15}$$

となり，これから

$$w=\frac{-p_0}{\pi^4 D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \tag{1.4.16}$$

を得る．(1.4.16)を(1.4.6)に代入すると，モーメントが

$$M_x=\frac{-p_0}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\nu}{b^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

$$M_y=\frac{-p_0}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\nu}{a^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \tag{1.4.17}$$

および

$$M_{xy}=\frac{p_0(1-\nu)}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 ab}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}$$

のように得られる．

1.4.2 円筒殻の曲げ理論

円筒殻は殻の中でも最も重要なものであり，しばしば設計などでも問題となる構造要素である．図 1.4.4 にその微小要素を図示する．ここでは問題を単純にするために荷重は円筒の中心軸に対称に働くものとする．すなわち，一様な内圧が働く場合などをここでは想定する．平板の曲げの問題と同様に考えれば，円筒周方向の対称性を考慮して，円筒要素に働く外力は図 1.4.4 のように記すことができる．いま，外力として内圧 p が与えられるとすれば，この要素

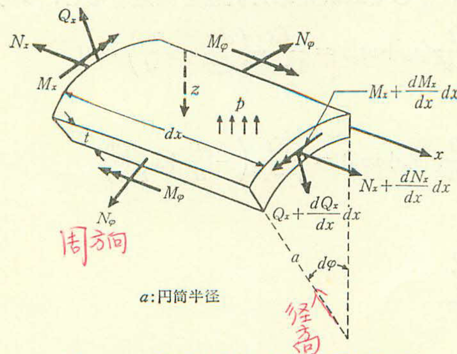


図 1.4.4 軸対称荷重が作用する円筒要素

に関するつりあい方程式は，力とモーメントとのつりあいを考えて以下のように書ける：

$$\frac{dN_x}{dx}adxd\varphi=0$$

$$\frac{dQ_x}{dx}adxd\varphi+N_\varphi dxd\varphi-padxd\varphi=0 \qquad (1.4.18)$$

および

$$\frac{dM_x}{dx}adxd\varphi-Q_xadxd\varphi=0$$

第1式から N_x＝一定となり，これを零と置く．$N_x \neq 0$ の場合の曲げへの影響は，ここでは無視できるものとする．また $N_x \neq 0$ の場合，応力や変形への寄与分も単に加えればよい．ほかの2式は次のように書ける．

$$\frac{dQ_x}{dx}+\frac{1}{a}N_\varphi=p$$

および　　(1.4.19)

$$\frac{dM_x}{dx}-Q_x=0$$

上式には三つの変数 N_φ, Q_x および M_x が含まれるため，以下に述べるようなくふうを要する．

対称性から周方向変位 v は零と置くことができる．したがって軸方向ひずみ ε_x と周方向ひずみ ε_φ とは，それぞれ

$$\varepsilon_x=\frac{du}{dx} \quad \text{および} \quad \varepsilon_\varphi=-\frac{w}{a} \qquad (1.4.20)$$

と書ける．殻は薄いとして二次元応力状態を仮定すると，フックの法則から

$$N_x=\frac{Et}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_\varphi)=\frac{Et}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dx}-\nu\frac{w}{a}\right)=0$$

および　　(1.4.21)

$$N_\varphi=\frac{Et}{1-\nu^2}(\varepsilon_\varphi+\nu\varepsilon_x)=\frac{Et}{1-\nu^2}\left(-\frac{w}{a}+\nu\frac{du}{dx}\right)$$

これから

$$\frac{du}{dx}=\nu\frac{w}{a}$$

および　　(1.4.22)

$$N_\varphi=-\frac{Etw}{a}$$

を得る．対称性から周方向には曲率変化はなく，また x 方向の曲率は $-d^2w/dx^2$ に等しいので(1.4.6)からの類推から

$$M_\varphi=\nu M_x$$

および (1.4.23)

$$M_x=-D\frac{d^2w}{dx^2}$$

の関係が成立する．ここに，D は(1.4.7)と同じものである．

さて(1.4.19)において Q_x を消去すると

$$\frac{d^2M_x}{dx^2}+\frac{1}{a}N_\varphi=p \tag{1.4.24}$$

(1.4.22)の第2式と(1.4.23)の第2式とを(1.4.24)に代入すると，w に対する方程式：

$$\frac{d^4w}{dx^4}+4\beta^4w=-\frac{p}{D} \tag{1.4.25}$$

を得る．ここに，

$$\beta^4=\frac{Et}{4a^2D}=\frac{3(1-\nu^2)}{a^2t^2} \tag{1.4.26}$$

であり，D は場所によって変化しないと仮定した．(1.4.25)の一般解は

$$w=e^{\beta x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$
$$+e^{-\beta x}(C_3\cos\beta x+C_4\sin\beta x)+f(x) \tag{1.4.27}$$

と書ける．ここに，$f(x)$ は(1.4.25)の特解であり，C_1～C_4 は境界条件から決められる積分定数を意味する．

【例】 端部($x=5$)に軸対称モーメント M_0 およびせん断力 Q_0 を受ける半無限円筒(**図 1.4.5**)．

この問題では圧力 $p=0$ であるため $f(x)=0$ と置くことができる．また，遠方において変形が消滅することから，(1.4.27)の右辺第1項は零でなければならず，結局 w は

$$w=e^{-\beta x}(C_3\cos\beta x+C_4\sin\beta x) \tag{1.4.28}$$

の形をとる．C_3 と C_4 は二つの境界条件

$$(M_x)_{x=0}=-D\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=0}=M_0$$

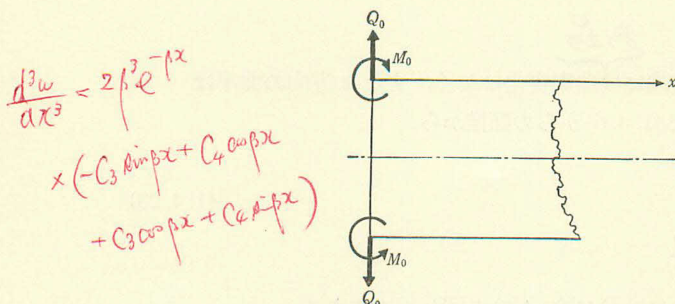


図 1.4.5 端部に軸対称モーメントおよびせん断力を受ける半無限円筒

および (1.4.29)

$$(Q_x)_{x=0} = \left(\frac{dM_x}{dx}\right)_{x=0} = -D\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)_{x=0} = Q_0$$

に(1.4.28)を代入して

$$C_3 = -\frac{1}{2\beta^3 D}(Q_0+\beta M_0) \quad \text{および} \quad C_4 = \frac{M_0}{2\beta^2 D} \tag{1.4.30}$$

と決まる．(1.4.28)に(1.4.30)を代入すると，最終的に w が

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D}[\beta M_0(\sin\beta x - \cos\beta x) - Q_0 \cos\beta x)] \tag{1.4.31}$$

と求められる．最大たわみは端部に現れ

$$(w)_{x=0} = -\frac{1}{2\beta^3 D}(\beta M_0 + Q_0) \tag{1.4.32}$$

となる．また，端部のたわみ角は

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = \frac{1}{2\beta^2 D}(2\beta M_0 + Q_0) \tag{1.4.33}$$

となる．

1.5 動的問題

固体力学において慣性力が影響を有するような問題を動的問題(dynamic problem)と呼ぶ．図 1.5.1 において質量 m の質点の，ばねの長さ方向の変位を $x(t)$ (下方向を正にとる)とすると，この質点の運動方程式はニュートンの第二法則から

$$m\ddot{x} + kx = f(t) \tag{1.5.1}$$

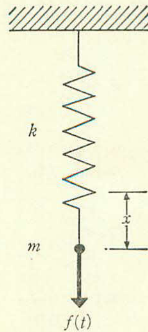


図 1.5.1　1 自由度の質点－ばね系

と与えられる．ここに($\dot{}$)は時間微分，k はばね定数，$f(t)$ は外力を表す．この式を与えられた初期条件のもとで解けば，運動のようすを知ることができる．このような現象を強制振動(forced vibration)あるいは動的応答(dynamic response)と呼ぶ．

もし，(1.5.1)において $f(t)=0$，すなわち外力が働かない場合を考えると，自由振動(free vibration)あるいは自然振動(natural vibration)と呼ばれる現象となる．

また，(1.5.1)において速度 $\dot{x}$ に比例する抵抗(減衰力)を受ける場合には，(1.5.1)の代りに

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx = f(x) \tag{1.5.2}$$

が運動を決定する．ここに，c は m, k などと同じく定数である．

1.5.1　ラグランジュの運動方程式

次に，**図 1.5.2** に示すように，3 自由度の質点－ばね系を考えよう．各質点について力のつりあいを考えると，運動方程式は次のように書ける．

$$m_1\ddot{x}_1+k_1x_1+k_2(x_1-x_2) = f_1(t)$$
$$m_2\ddot{x}_2+k_2(x_2-x_1)+k_3(x_2-x_3) = f_2(t) \tag{1.5.3}$$

および

$$m_3\ddot{x}_3+k_3(x_3-x_2) = f_3(t)$$

上式は明らかに(1.5.1)の一般化である．

系がより複雑になると，力のつりあいから運動方程式を導くことがしばしば困難となる．このような場合，ラグランジュ(Lagrange)の運動方程式を用い

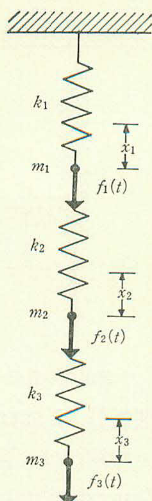


図1.5.2 3自由度の質点－ばね系

るのが便利である．この方程式は，系の運動エネルギーを T，系のポテンシャルエネルギーを U としたとき

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}(T-U)=0;\ i=1,2,\cdots,n \tag{1.5.4}$$

と表される．ここに，$x_i; i=1,2,\cdots,n$ は力学系の変数であり，n はその自由度を表す．

さて図1.5.2に示す3自由度の質点－ばね系について(1.5.4)を用いることを考えよう．まず，3質点が有する運動エネルギー T は次式で与えられる．

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1{}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2{}^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3{}^2 \tag{1.5.5}$$

次にポテンシャル・エネルギー U は，ばねと外力とがそれぞれ有するポテンシャル・エネルギーの和となるから，次のように表される．

$$U=U_S+U_F \tag{1.5.6}$$

ここに，U_S, U_F はそれぞればね，外力が有するポテンシャル・エネルギーであり

$$U_S=\frac{1}{2}k_1x_1{}^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2+\frac{1}{2}k_3(x_3-x_2)^2 \tag{1.5.7}$$

および

$$U_F = -f_1x_1 - f_2x_2 - f_3x_3 \tag{1.5.8}$$

となる.

このようにして求められた T と U とを(1.5.4)に代入して計算を行うと，結局(1.5.3)を得ることがわかる.

さて，(1.5.3)はマトリクス記号を用いると

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} \tag{1.5.9}$$

と書くことができる. ここに

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \tag{1.5.10}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix}$$

である. 更に，力学系が複雑になった場合にも減衰力が存在しないと仮定すれば，その運動方程式は(1.5.9)の形をとる.

1.5.2 固有値問題

本節の初めに述べたように，外力がない場合の運動は自由振動となる. この場合の解は，(1.5.9)において $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$ と置いた式

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{1.5.11}$$

に

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}e^{ipt} \tag{1.5.12}$$

を代入することによって得られる. ここに $\boldsymbol{X}$ は振幅マトリクスと呼ばれる. さて実際に(1.5.12)を(1.5.11)に代入すると

$$(\boldsymbol{K} - p^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \tag{1.5.13}$$

となるここで，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，すなわち $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 以外の解を有する条件として，次式が成立しなければならない.

$$|\boldsymbol{K} - p^2\boldsymbol{M}| = 0 \tag{1.5.14}$$

この行列式は，自由振動問題の固有値方程式(eigen equation)，あるいは特性

方程式(characteristic equation)と呼ばれ，p^2 に関する代数方程式となる．この方程式を解いて得られる解 p^2 のことを固有値(eigen value)と呼ぶ．また，$p/2\pi$ のことを固有振動数，その逆数を固有周期などという．更にそれぞれの p^2 に対応する $\boldsymbol{X}$ のことを固有ベクトルと呼ぶ．ここに $\boldsymbol{X}$ は相対値だけが決まる．

さて，(1.5.14)の固有値方程式を解くためには，p^2 に関する代数方程式を解けばよいといえるが，自由度の数が多くなると一般には困難となる．そのためには電子計算機を使って解くための数値解法がしばしば用いられる．その代表的なものはべき乗法とヤコビ(Jacobi)法とであるが，ここでは前者について簡単に説明する．

まず，(1.5.13)に前から $\boldsymbol{M}^{-1}$ を掛け合わせると次式が得られる．

$$\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{K}-p^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{X}=0 \tag{1.5.15}$$

ここで

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I} \quad (\boldsymbol{I}\text{ は単位マトリクス}) \tag{1.5.16}$$

に注意すれば，(1.5.15)は

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X} \tag{1.5.17}$$

と書かれる．ここに

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} \quad \text{および} \quad \lambda=p^2 \tag{1.5.18}$$

である．

さて，ある任意なベクトル $\boldsymbol{X}^{(0)}$ を選び，それにマトリクス $\boldsymbol{B}$ を何度も繰り返し掛けてゆくと，i 回掛けた結果の $\boldsymbol{X}^{(i)}$ は，$i\to\infty$ のとき，しだいに“絶対値最大の固有値に対応する固有ベクトルに近づく”ことを以下に示そう．

いま，自由度を n としたとき，n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{X}_j (j=1,2,\cdots,n)$ によって初期ベクトル $\boldsymbol{X}^{(0)}$ が，次のように表されたとする．

$$\boldsymbol{X}^{(0)}=\sum_{j=1}^{n}C_j\boldsymbol{X}_j \tag{1.5.19}$$

したがって，λ_j を固有ベクトル $\boldsymbol{X}_j$ に対応する固有値として

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}^{(1)}&=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(0)}=\sum_{j=1}^{n}C_j\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_j=\sum_{j=1}^{n}C_j\lambda_j\boldsymbol{X}_j\\
\boldsymbol{X}^{(2)}&=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(1)}=\sum_{j=1}^{n}C_j(\lambda_j)^2\boldsymbol{X}_j\\
&\;\;\vdots\\
\boldsymbol{X}^{(i)}&=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(i-1)}=\sum_{j=1}^{n}C_j(\lambda_j)^i\boldsymbol{X}_j
\end{aligned} \tag{1.5.20}$$

ここで，λ_n を最大固有値とし，$C_n\neq 0$ とすれば

$$X^{(i)}=C_n(\lambda_n)^i\left[X_n+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{C_j}{C_n}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^i X_j\right] \tag{1.5.21}$$

ところで

$$\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right|<1,\ (j \neq n) \tag{1.5.22}$$

であるから

$$\lim_{i\to\infty} X^{(i)}=C_n(\lambda_n)^i X_n \tag{1.5.23}$$

となる．すなわち，$X^{(i)}$ は X_n に比例したベクトルにしだいに近づくことがわかる．また，(1.5.20)から

$$\lambda_n=\lim_{i\to\infty}\frac{X^{(i)T}X^{(i)}}{X^{(i)T}X^{(i-1)}} \tag{1.5.24}$$

であるから $i\to\infty$ に近づけることによって λ_n を求めることもできる．

次に，λ_n 以外の固有値を求めるためには，固有ベクトルの直交性を用いる．すなわち，固有ベクトルの直交性

$$X_n{}^T M X_j=0,\ (j=1,2,\cdots,n-1) \tag{1.5.25}$$

から，$X_j=[a_1,a_2,\cdots,a_p,\cdots,a_n]^T$ の要素のうちの1個，a_p をほかの要素で表し，これを(1.5.17)に代入すれば a_p が消去され，結局，$(n-1)$個の未知数を含んだ n 個の方程式が得られる．そこで，p 番目の方程式を除去すると$(n-1)$自由度の固有値方程式が得られる．この縮小された系の固有値は，もとの系の$(n-1)$個の固有値 $\lambda_j(j \neq n)$ であり，対応する固有ベクトルは，もとの系の固有ベクトルから a_p を除いたものを表す．この場合の a_p は(1.5.25)から求められる．このようにして，最初と同じような反復計算を行うと，λ は λ_{n-1} に，また，$X^{(i)}$ は X_{n-1} に近づく．同様にして $\lambda_{n-2},\lambda_{n-3},\cdots,X_{n-2},X_{n-3},\cdots$ を計算することができる．

なお，(1.5.13)に左から K^{-1} を掛けると(1.5.17)の代りに

$$CX=\frac{1}{\lambda}X \tag{1.5.26}$$

を得る．ただし

$$C=K^{-1}M \tag{1.5.27}$$

(1.5.17)の代りに(1.5.26)を用いて先程の反復計算を行えば，固有値は最小固有値に近づくことがわかる．したがって，問題の性質に応じて方法を選択することができる*.

* たとえば，構造物の地震応答に関連する場合には最小固有値が重要となる．

1.5.3 動的応答問題

動的応答問題のうち，簡単に解が得られる場合として，(1.5.1)の $f(t)$ が

$$f(t) = P\cos pt \tag{1.5.28}$$

という形で与えられるケースがある．すなわち

$$m\ddot{x}+kx = P\cos pt \tag{1.5.29}$$

として，この方程式の解は特解 x_1 と斉次方程式の一般解 x_2 とから

$$x = x_1+x_2 \tag{1.5.30}$$

と表される．

(1) 特解 x_1：

$$m\ddot{x}_1+kx_1 = P\cos pt \tag{1.5.31}$$

を満たす解を求めるために，$x_1=A\cos pt$ と置いて上式に代入すると

$$(k-mp^2)A = P$$

となり

$$A = \frac{P}{k}\left\{\frac{1}{1-(p/\omega)^2}\right\}$$

を得る．ここに $\omega^2=k/m$ と置いた．以上から

$$x_1 = \frac{P}{k}\left\{\frac{\cos pt}{1-(p/\omega)^2}\right\} \tag{1.5.32}$$

となる．

(2) 斉次方程式の一般解 x_2：

$$m\ddot{x}_2+kx_2 = 0 \tag{1.5.33}$$

の一般解は，よく知られているように，C_1 と C_2 を初期条件によって決められる定数として

$$x_2 = C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t \tag{1.5.34}$$

と表される．

以上から，(1.5.29)の一般解は，(1.5.32), (1.5.34)を(1.5.30)に代入して

$$x = C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{P}{k}\left\{\frac{\cos pt}{1-(p/\omega)^2}\right\} \tag{1.5.35}$$

となる．

上式の初めの2項が自由振動を，また最後の項が強制振動を表している．実

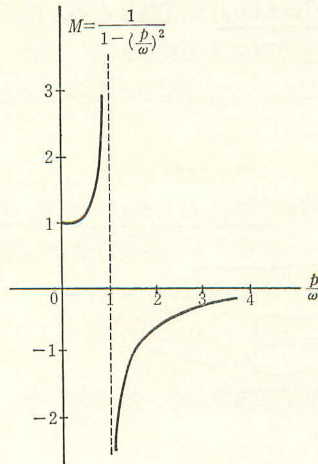


図 1.5.3 拡大率

際の問題では，減衰力によって自由振動項は，時間とともにしだいに減衰し，最後には第3項だけが残った状態となる．この状態を定常強制振動といい，この状態に達するまでを過渡振動と呼ぶ．

さて，上式の第3項において，$M=1/\{1-(p/\omega)^2\}$ と置くと，M は P による静的変位に対する拡大率を表している．この M を p/ω に対してプロットすると**図 1.5.3** のようになる．図から明らかなように，$p=\omega$，すなわち起振力の振動数が系の自由振動数に等しいとき，強制振動の振幅は無限に大きくなることがわかる．この状態を共振(resonance)と呼ぶ．

以上では，外力が時間に関して周期的に変化するという特別な場合を取り扱ったが，実際に生ずる問題では，$f(t)$ がしばしば複雑な時間の関数として表される．このような問題ではデュアメル(Duhamel)の積分法がよく用いられる．

更に，多自由度の動的応答解析法としては，電子計算機を用いる方法として，マトリクスモーダルアナリシス法やニューマーク(Newmark)の β 法などで代表されるステップバイステップ数値積分法が利用される．

1.6 座屈問題

薄肉の構造物(たとえば細い棒，薄い平板，薄い殻)においては，圧縮応力状

態においてしばしば座屈(buckling)が問題となる．原子炉においては，圧力容器を除けばしばしば座屈を考慮する必要がある．また，クリープ変形に伴う座屈なども重要である．ただしここでは座屈の簡単な例を示すにとどめる．

1.6.1 棒の座屈

図1.6.1に示すような棒が圧縮力 P を受けるとき，P がある限界値 P_c に達すると棒は横方向にたわみ，座屈する．ある断面 x における z 方向のたわみを w とすると，モーメント M は次式で表される．

$$M = -EI\frac{d^2w}{dx^2} = Pw \qquad (1.6.1)$$

固有値問題 P

ここに，EI は w 方向の曲げ剛性である．境界条件を

$$w(0) = w(l) = 0 \qquad (1.6.2)$$

と置く．一方，(1.6.1)の解は

$$w = C_0\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x + C_1\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}x \qquad (1.6.3)$$

となる．ここで，(1.6.2)の第1の条件から $C_0=0$ である．したがって，第2の条件は

$$C_1\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}l = 0$$

となる．これが成立するためには

$$C_1 = 0 \quad \text{あるいは} \quad \sqrt{\frac{P}{EI}}l = k\pi;\ k = 0, 1, 2, \cdots$$

でなければならない．$C_1=0$ あるいは $k=0$ のときは，(1.6.3)から $w=0$ となり，平衡状態は変形のない状態となるので，有意な解の条件は

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}l = k\pi;\ k = 1, 2, 3, \cdots \qquad (1.6.4)$$

で表される．k に対応する w と P をそれぞれ w_k, P_k と置くと，

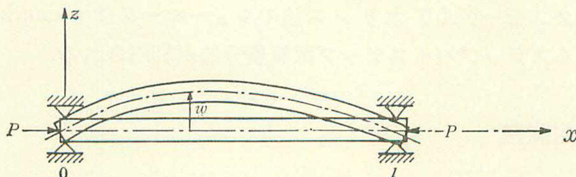


図1.6.1 圧縮力を受ける両端単純支持棒の変形

$$w_k \propto \sin\frac{k\pi x}{l},\ \ k=1,2,\cdots$$
$$P_k=\frac{k^2\pi^2 EI}{l^2},\ \ k=1,2,\cdots \tag{1.6.5}$$

となる．これから，たわんだ平衡状態が生じるための圧縮力 P の最小値は P_1 であり，そのたわみ形は w_1 であることがわかる．

次に，初期たわみがある場合について考える．初期たわみ量を w_0，軸力による増加たわみを w^* とすれば，全たわみ w は

$$w=w_0+w^*$$

と書ける．(1.6.1)の M に関連するのは $w^*=w-w_0$ であるから，この場合の平衡条件は

$$-EI\frac{d^2(w-w_0)}{dx^2}=Pw \tag{1.6.6}$$

となる．w_0 と w をフーリエ展開すると

$$w_0=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

および

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{1.6.7}$$

なお，これらの式は両端での境界条件を満たしている．これらを(1.6.6)に代入すると

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[EI(b_k-a_k)\frac{k^2\pi^2}{l^2}-Pb_k\right]\sin\frac{k\pi x}{l}=0 \tag{1.6.8}$$

となる．ここで $\sin\frac{k\pi x}{l}$ の係数を0と置くことにより b_k が求められ，結局 w は

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_kP_k}{P_k-P}\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{1.6.9}$$

となる．$a_1 \neq 0$ を仮定すると，P を0から増大させるとき，P が P_1 に近づくと w が限りなく増大することが上式からわかる．この P_1 のことを座屈荷重という．また，このときに得られるたわみ波形は w_1 であり，これを座屈波形と呼ぶ．

1.6.2 板の座屈

4辺で単純支持された長方形板$(0\leqq x\leqq a, 0\leqq y\leqq b)$が$x$軸方向に圧縮応力$p$を受けるときの座屈問題について考える．この板にたわみwが生じたとすると，中央面の微小面積$dxdy$の部分に作用する合応力N_xの作用方向は，変形した中央面の接線方向となり，**図1.6.2**から明らかなようにz方向の力

$$\left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx\right)\right]dy-N_x\frac{\partial w}{\partial x}dy=-pt\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dxdy$$

が生ずる．ここで$N_x=-pt$である．これから，z方向の圧力$pt\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}dxdy$が作用していることと等価になり，板の曲げ問題の平衡条件を表す(1.4.8)から

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+pt\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad (1.6.10)$$

を得る．上式に，周辺の境界条件を満たす変形モードである

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (1.6.11)$$

を代入すると，正弦関数の係数が0であるという条件から

$$D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2-pt\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2=0$$

を得る．これから

$$p=\frac{\pi^2 D}{b^2 t}\left(\frac{mb}{a}+n^2\frac{a}{mb}\right)^2$$

となる．実際の座屈問題ではpの最小値p_cを考えればよい．したがって

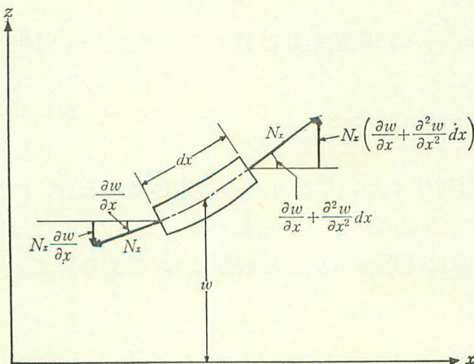


図1.6.2 合応力N_xのz方向成分

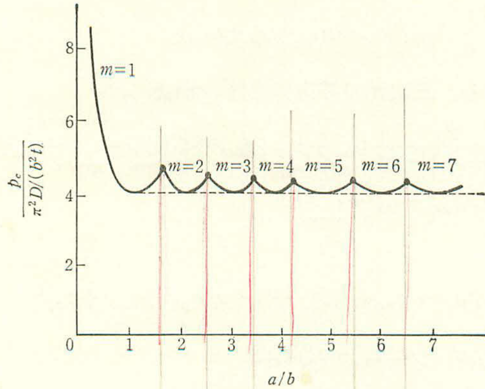


図 1.6.3 無次元化した座屈応力

$$n=1,\ \ m=\left(\frac{a}{b}\text{に近い整数値}\right)$$

を考えればよい．このときの座屈波形は，明らかに

$$w \propto \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

の形を採る．無次元化した p_c と a/b の関係は図 **1.6.3** のようになる．

1.7 変分原理

固体力学の解析手段の基礎として，しばしば変分原理が重要な役目を果たす．また，平衡方程式や境界条件式を求めるための手段としても変分原理が用いられることがある．ここでは，その要点のいくつかについて述べる．

1.7.1 ひずみエネルギー関数とコンプリメンタリーエネルギー関数

応力－ひずみ関係が(1.1.10)あるいは(1.1.11)で与えられるものと仮定すると，ひずみエネルギー関数 $\mathscr{A}(\varepsilon_{ij})$ およびコンプリメンタリーエネルギー関数 $\mathscr{B}(\sigma_{ij})$ は，次式で定義される．

$$\mathscr{A}(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}A_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \tag{1.7.1}^*$$

$$\mathscr{B}(\sigma_{ij})=\frac{1}{2}B_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{1.7.2}^*$$

ひずみ－変位関係式(1.1.5)を用いると，(1.7.1)は

$$\mathscr{A}(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{8} A_{ijkl}(u_{i,j}+u_{j,i})(u_{k,l}+u_{l,k}) \tag{1.7.3}$$

と書くことができる．三次元の等方弾性体の場合には

$$\begin{aligned}\mathscr{A} = &\frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})^2+G({\varepsilon_{xx}}^2+{\varepsilon_{yy}}^2+{\varepsilon_{zz}}^2)\\ &+2G({\varepsilon_{yz}}^2+{\varepsilon_{zx}}^2+{\varepsilon_{xy}}^2)\end{aligned} \tag{1.7.4}$$

および

$$\begin{aligned}\mathscr{B} = &\frac{1}{2E}\{(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})^2+2(1+\nu)({\sigma_{yz}}^2+{\sigma_{zx}}^2+{\sigma_{xy}}^2\\ &-\sigma_{yy}\sigma_{zz}-\sigma_{zz}\sigma_{xx}-\sigma_{xx}\sigma_{yy})\}\end{aligned} \tag{1.7.5}$$

と書くことができる．

*　i, j, k, l について和を採る．たとえば

$$\mathscr{A}(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}A_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \sum_{i=1,}^{3}\sum_{j=1,}^{3}\sum_{k=1,}^{3}\sum_{l=1}^{3}\frac{1}{2}A_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$$

である．

弾性体については，単位体積中に蓄えられるひずみエネルギーをひずみ成分で表したものが $\mathscr{A}$ であり，同様に応力成分で表したものが $\mathscr{B}$ であるということができる．したがって，弾性体については $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ は等しくなる．

1.7.2　仮想仕事の原理

構造物が与えられた物体力 $\bar{X}_i$ および境界条件のもとでつりあっているとすれば，明らかに(1.1.1)および(1.1.17)を満足している．この状態から，任意の微小な仮想変位 δu_i をこの構造物に与えることを考える．このとき

$$-\int_V (\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i dV + \int_{S_\sigma}(T_i-\bar{T}_i)\delta u_i dS = 0 \tag{1.7.6}$$

が成立する．ここに dV, dS は，それぞれ物体の微小要素と表面の微小面積要素を表す．なお，仮想変位 δu_i は，S_u 上の幾何学的境界条件(1.1.19)を乱さないものとする．すなわち，

$$\delta u_i = 0 \quad (S_u \text{上}) \tag{1.7.7}$$

を拘束条件として与えておく．次に，$S=S_\sigma+S_u$ 上での関係

$$dydz = \pm l ds,\ \ dzdx = \pm m ds,\ \ dxdy = \pm n ds \tag{1.7.8}$$

（ここに (l, m, n) は S 上の単位法線の方向余弦）

を用いると

$$\int_V \sigma_{xx,x}\delta u_x dxdydz = \int_S \sigma_{xx} l \delta u_x dS - \int_V \sigma_{xx}\delta u_{x,x} dxdydz \quad (1.7.9)$$

などとなるから，結局(1.7.6)は

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV - \int_V \bar{F}_i \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i \delta u_i dS = 0 \quad (1.7.10)$$

と書くことができる．ここに(1.1.5)の変分式である次の関係

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \quad (1.7.11)$$

(1.7.7)および

を用いた．(1.7.10)が仮想仕事の原理であり，この原理は応力－ひずみ関係式に無関係に成立する．

1.7.3 コンプリメンタリー仮想仕事の原理 (略)

構造物が与えられた物体力および境界条件のもとでつりあっているものとすれば，明らかに(1.1.5)および(1.1.19)を満足している．この状態から，任意の微小な仮想応力$\delta\sigma_{ij}$をこの構造物に与えることを考える．このとき，

$$\int_V \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}dV + \int_{S_u}(u_i - \bar{u}_i)\delta T_i dS = 0 \quad (1.7.12)$$

が成立する．なお，仮想応力$\delta\sigma_{ij}$は，応力のつりあい方程式(1.1.1)およびS_σ上の境界条件(1.1.17)を乱さないものとする．すなわち

$$\delta\sigma_{ij,j} = 0 \quad (V\text{内}) \quad (1.7.13)$$

および

$$\delta T_i = 0 \quad (S_\sigma\text{上}) \quad (1.7.14)$$

を拘束条件として与えておく．次に，仮想仕事の原理の場合と同様にして

$$\int_V u_{x,x}\delta\sigma_{xx} dxdydz = \int_S u_x \delta\sigma_{xx} l dS - \int_V \delta\sigma_{xx,x} u_x dxdydz \quad (1.7.15)$$

などとなるから，結局(1.7.12)は

$$\int_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}dV - \int_{S_u} \bar{u}_i \delta T_i dS = 0 \quad (1.7.16)$$

と書くことができる．ここに(1.7.13)および(1.7.14)を用いた．(1.7.16)がコンプリメンタリー仮想仕事の原理であり，仮想仕事の原理と同様に応力－ひずみ関係式に無関係に成立する．

1.7.4 最小ポテンシャルエネルギーの原理

(1.7.1)において，ひずみエネルギー関数 $\mathscr{A}$ をひずみ成分の関数として定義したが，ひずみ－変位関係式(1.1.5)を用いると，$\mathscr{A}$ は変位成分の関数と考えることができ，これを $\mathscr{A}(u_i)$ と記す．このような $\mathscr{A}(u_i)$ を用いて，関数の関数，すなわち汎関数 Π_p を次のように定義する．

$$\Pi_p=\int_V(\mathscr{A}(u_i)-\bar{F}_i u_i)dV-\int_{S_\sigma}\bar{T}_i u_i dS \tag{1.7.17}$$

ここに u_i としては S_u 上での幾何学的境界条件を満たすような一価連続関数を選ぶ．このような変位の任意な許容関数に対して，Π_p がスカラ量として計算される．(1.7.17)の右辺の第1，2，3項はそれぞれ，ひずみエネルギー，物体力および表面力のポテンシャルエネルギーを表している．このような Π_p に関して，u_i が正解のとき Π_p は最小となることが証明される．この原理を最小ポテンシャルエネルギーの原理と呼ぶ．

1.7.5 最小コンプリメンタリーエネルギーの原理

(1.7.2)で与えられるコンプリメンタリーエネルギー関数 $\mathscr{B}(\sigma_{ij})$ を用いて汎関数 Π_c を次のように定義する．

$$\Pi_c=\int_V\mathscr{B}(\sigma_{ij})dV-\int_{S_u}\bar{u}_i T_i dS \tag{1.7.18}$$

ここに σ_{ij} としては，V 内でのつりあい方程式(1.1.1)と S_σ 上の力学的境界条件(1.1.17)を満足するような一価連続関数を選ぶ．このような応力の任意な許容関数に対して，Π_c がスカラ量として計算される．このような Π_c に関して，σ_{ij} が正解のとき Π_c は最小となることが証明される．この原理を最小コンプリメンタリーエネルギーの原理と呼ぶ．

1.7.6 Hu-Washizu の原理

(1.7.17)で与えられる汎関数 Π_p の一つの一般化として得られるものに Hu-Washizu の原理がある．この汎関数を Π_I とすれば

$$\Pi_I=\int_V\left\{\mathscr{A}(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_i u_i-\sigma_{ij}\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\right\}dV$$
$$-\int_{S_\sigma}\bar{T}_i u_i dS-\int_{S_u}p_i(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{1.7.19}$$

と書ける．ここに，σ_{ij} と p_i は，ともにラグランジュ(Lagrange)の未定乗数で

ある．この場合，付帯条件は必要ない．すなわち，Π_I の停留条件は，微小変形弾性問題のすべての基礎方程式を与えることが示される．なお，上式の σ_{ij} と p_i との物理的意味はそれぞれ，応力と S_u 上の引張力 T_i とであることも同時に示される．また，上式で変分を受ける関数は $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, u_i, p_i$ である．

1.7.7 Hellinger-Reissner の原理

Hu-Washizu の汎関数(1.7.19)から，ひずみ成分 ε_{ij} を消去することによって Hellinger-Reissner の原理が導かれる．この汎関数を Π_R とすれば

$$\Pi_R=\int_V\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j}+u_{j,i})-\mathcal{B}(\sigma_{ij})-\bar{F}_iu_i\right]dV$$
$$-\int_{S_\sigma}\bar{T}_iu_idS-\int_{S_u}p_i(u_i-\bar{u}_i)dS \qquad (1.7.20)$$

と書ける．ここに，変分を受ける関数は σ_{ij}, u_i, p_i である．この場合，付帯条件は必要ない．Π_R の変形として

$$-\Pi_R{}^*=\int_V[\mathcal{B}(\sigma_{ij})+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)u_i]dV$$
$$-\int_{S_\sigma}(T_i-\bar{T}_i)u_idS-\int_{S_u}T_i\bar{u}_idS \qquad (1.7.21)$$

もよく用いられる．この場合，変分を受ける関数は σ_{ij}, u_i であり，やはり付帯条件は必要ない．

参考文献

(1) 山本善之・堀幸夫：固体力学，岩波講座基礎工学15，岩波書店，昭和 43 年.

(2) 山田嘉昭：塑性・粘弾性，コンピュータによる構造工学講座，II-2-A，培風館，昭和 47 年.

(3) 川井忠彦：マトリックス法振動および応答，同上，I-4-B，培風館，昭和 46 年.

(4) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，同上，II-3-A，培風館，昭和 47 年.

(5) S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, 2nd Edition, McGraw-Hill Book Co., 1959.

(6) F. K. G. Odqvist and J. Hult : Kriechfestigkeit Metallischer Werkstoffe, Springer-Verlag, 1962 (村上澄男訳：クリープ強さの理論，培風館，昭和 42 年).

2. 有限要素法概論

有限要素法は近年のディジタル形電子計算機の発達に伴って広く知られるようになった構造解析の有力な近似手法である．原子炉構造の分野においても，この手法は解析の常用手段となりつつある．本章ではそのすべてを集成することは不可能であるので，その概念だけを簡単な例題を用いながら述べることにする．

2.1 有限要素法とは

原子炉構造の応力解析の手法として有限要素法の応用が，最近多く見られるようになってきた．有限要素法の実用に関する最初の論文は，1954 年にアメリカの航空機製造会社であるボーイング社の技術者達によってアメリカ航空学会において発表されている*.

* M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin and L. J. Topp : "Stiffness and deflection analysis of complex structures," J. Aero Sci., 23, pp.805～823, 1956.

その後，今日までの間に有限要素法は構造物の応力解析手法としてあらゆる分野に広がった．更に，最近においては非構造解析の手法として，連続体の各種物理現象の解析にまでその応用を拡張しつつある．このような有限要素法の発達を促した要因の一つは大形電子計算機の出現が関係している．特に，有限要素法はマトリクス法とも呼ばれることがあり，その解の過程において多くのマトリクス演算が必要であるために大形の電子計算機の使用が不可欠となる．

本章では有限要素法の概要を，主として基礎的な概念について説明を行う．

2.1.1 有限要素法の概略

いま，ある二次元の連続体を考え，それを図 **2.1.1** のように有限個の三角形

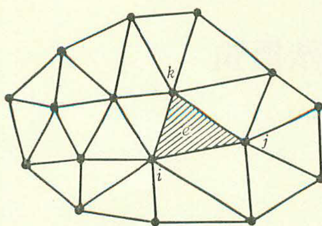


図 2.1.1　二次元連続体の三角形要素による分割

要素で分割する．このとき，個々の三角形を要素(element)と呼び，三角形の頂点の一つ一つを節点(node)と称する．個々の節点には，問題に応じた物理量が与えられる．たとえば，構造解析では，変位ベクトルと力のベクトルが節点量として与えられる．図 2.1.1 において三角形 e を考えるとすれば，e に関係する節点 i, j, k の変位ベクトルと力のベクトルを結びつける関係式を求める．このためには変分原理が便利である．他の要素についても，同様にして節点変位ベクトルと節点力ベクトルの関係を求める．各要素について，以上の関係式が得られたら，次にそれらを結合することを考える．結合の方法は，各節点において変位は共有されること，および各節点において力はつりあうという二つの仮定を用いる．このとき，境界で力が与えられる場合には，そのような力も境界節点上で考慮する．最後に境界で変位が与えられる場合について，適当な考慮を行う．以上の過程によって節点の物理量に対する連立一次方程式が得られる．これを解くことによって節点の物理量を得ることができる．要素内の物理量は節点物理量を補間することによって求められる．構造解析の問題では，求めようとする節点物理量によって変位法，応力法あるいは混合法などと俗に呼ばれることがある．

2.1.2　要素の種類

有限要素法がこのように使われるようになった背景には複雑な幾何学的形状や境界条件を容易に処理できるという点がある．このためには問題に応じて多種類の要素が準備されている必要がある．**図 2.1.2** に要素の例をいくつか示しておく．連続体の形状や境界条件の与え方によって，用いる要素の種類も各種のものが考えられる．更に，特殊な形状の連続体を解析する場合には，適当な要素を独自に考案することも可能である．

連続体の形状や境界条件が与えられたとき，いかなる要素を用いるかについ

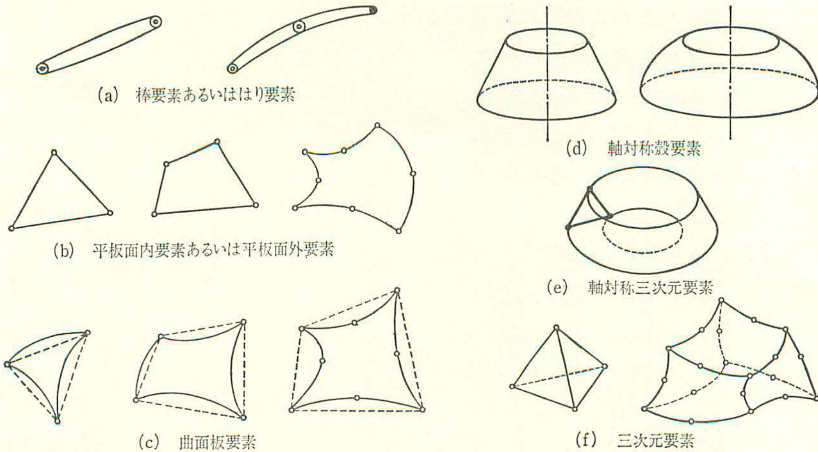


図 2.1.2 要素の例

ては，かなりの工学的熟練を必要とする．

2.1.3 要素分割法

一般的にいって，物理量が急激に変化する場所では要素分割を細かくする必要がある．しかし，一つの連続体において，要素サイズの範囲*が大きすぎると計算機の中で丸め誤差を生ずる可能性があり，好ましくないとされている．同様に，極端な形の要素も誤差の原因となる**．

* 大きな要素と小さな要素のサイズの比のことである．

** 詳しくは，山本善之・山田善一：マトリクス構造解析の誤差論，コンピュータによる構造工学講座，II-5-B，培風館，昭和 47 年を参照．

要は，限られた計算機時間とメモリーの範囲内で最大の精度を得ることであり，このためには，多くの初歩的な要素よりも高級な要素を少なく用いたほうが効果が上がる場合がしばしばある．

2.2 マトリクス代数

有限要素法による数値解析には，しばしばマトリクス代数の知識を必要とする．ここでは，その要約を述べる．

2.2.1 マトリクスの定義

1組の変数 x と b との間に線形関係が

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

のように成立するとき，これを

$$[A]\{x\} = \{b\} \tag{2.2.2}$$

と書くことにする．ここに

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \tag{2.2.3}$$

および

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

である．$[A]$, $\{x\}$ あるいは $\{b\}$ をマトリクスと呼ぶ．$\{x\}$ や $\{b\}$ は列マトリクスあるいは列ベクトルと呼ぶ．

2.2.2 マトリクスの加法と減法

(2.2.1)において $[A]$ の内容をそのままで，$\{x\}$ と $\{b\}$ とを

$$\{x'\} = \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Bmatrix}$$

および (2.2.4)

$$\{b'\} = \begin{Bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{Bmatrix}$$

に変更できるものと仮定する．このとき，

$$a_{11}x_1'+a_{12}x_2'+a_{13}x_3' = b_1'$$
$$a_{21}x_1'+a_{22}x_2'+a_{23}x_3' = b_2' \qquad (2.2.5)$$
$$a_{31}x_1'+a_{32}x_2'+a_{33}x_3' = b_3'$$

あるいは

$$[A]\{x'\} = \{b'\} \qquad (2.2.6)$$

の関係が成立する．(2.2.1)と(2.2.5)とを加えると

$$a_{11}(x_1+x_1')+a_{12}(x_2+x_2')+a_{13}(x_3+x_3') = b_1+b_1'$$
$$a_{21}(x_1+x_1')+a_{22}(x_2+x_2')+a_{23}(x_3+x_3') = b_2+b_2' \qquad (2.2.7)$$
$$a_{31}(x_1+x_1')+a_{32}(x_2+x_2')+a_{33}(x_3+x_3') = b_3+b_3'$$

の関係を得る．いま，マトリクスの和を，配列の個々の項の単純和と定義すれば，上式は

$$[A]\{x+x'\} = \{b+b'\} \qquad (2.2.8)$$

と書くことができる．マトリクス和は，マトリクスの大きさが同一の場合だけに可能であり，たとえば

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix} \qquad (2.2.9)$$

となる．なお $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ とを加えることなどは不可能である．なぜなら，前者の列×行の大きさは2×3であるのに対して，後者のそれは2×2であり，行の大きさは同じでも列の大きさが異なるからである．マトリクスの差についても同様である．

2.2.3 マトリクスの転置(transpose)

あるマトリクスが与えられたとき，その行と列とを交換したものを，もとのマトリクスの転置マトリクスと呼ぶ．転置マトリクスを，記号Tを用いて表現すると

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (2.2.10)$$

あるいは

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}^T = \lfloor b_1 \quad b_2 \quad b_3 \rfloor \tag{2.2.11}$$

などと書くことができる．(2.2.11)は行マトリクスあるいは行ベクトルとも呼ばれる．

2.2.4　逆マトリクス(inverse matrix)

(2.2.3)の$[A]$において行と列との数が同じならば，$[A]$を正方マトリクスと呼ぶ．$[A]$が正方ならば，(2.2.1)あるいは(2.2.2)において，与えられた$[A]$と$\{b\}$との組について$\{x\}$を求めることができる．すなわち，(2.2.1)あるいは(2.2.2)は未知数$\{x\}$に関する連立一次方程式となり，その解を

$$\{x\} = [A]^{-1}\{b\} \tag{2.2.12}$$

と表現する．ここでマトリクス$[A]^{-1}$はマトリクス$[A]$の逆マトリクスと呼ばれ，$[A]^{-1}$の大きさは$[A]$の大きさと同一である．$[A]$と$[A]^{-1}$とに関して次式が成立する．

$$[A]^{-1}[A] = [I] = [A][A]^{-1} \tag{2.2.13}$$

ここに，$[I]$は単位マトリクス，すなわちすべての対角要素が1，すべての非対角要素が0の正方マトリクスである．連立一次方程式の解が存在しないときには，$[A]^{-1}$を計算することができない．

2.2.5　スカラ積

力学の問題においては，力と変位のスカラ積として仕事が表現される．いま，力と変位をそれぞれ

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad \text{および} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \tag{2.2.14}$$

のように，n個の成分を有するベクトルで表すと，仕事Wは，それらの成分で

$$W = \sum_{i=1}^{n} F_i u_i \tag{2.4.15}$$

と書くことができる．マトリクスの形で上式を表すとすれば

$$W = \lfloor F_1, F_2, \cdots, F_n \rfloor \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \{F\}^T\{u\} = \{u\}^T\{F\} \tag{2.2.16}$$

となる.

2.2.6 積の転置

二つ以上のマトリクスが積の形で与えられているとき，その転置マトリクスは次式で与えられる.

$$([A][B]\cdots[C])^T = [C]^T\cdots[B]^T[A]^T \tag{2.2.17}$$

2.2.7 マトリクスの分割(partitioning)

マトリクス$[A]$, $[B]$がそれぞれ

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]$$

および

$$[B] = \left[\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ \hdashline b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{array}\right] \tag{2.2.18}$$

と与えられているものとする．両マトリクスを，破線のように部分マトリクスに分割し，各部分をスカラ量のように考えると次のように書ける.

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{および} \quad [B] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.2.19}$$

このとき，$[A]$と$[B]$との積は

$$[A][B] = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{bmatrix} \tag{2.2.20}$$

ここで$A_{11}B_1$などを，もとの成分を用いて計算すれば，マトリクス$[A][B]$が求められることがわかる．なお，マトリクスを分割する場合には$A_{11}B_1$などの計算が可能となるように分割の方法に注意しなければならない.

2.3　棒の引張り——有限要素法の計算過程

有限要素法の計算の流れを知るために，図**2.3.1**に示すような簡単な棒の引張問題を考えてみよう．問題の棒は，要素 A および B に分割されており，それぞれのヤング率と断面積が図の下のように与えられているものとする．境界条件としては，棒の左端 $x=x_1$ において変位 $u_1=0$，棒の右端 $x=x_3$ において荷重が $\overline{X}_3$ と与えられているものと考える．

2.3.1　要素の変位関数

まず，要素 A および要素 B についてそれぞれ変位関数を仮定する．要素 A について以下では考える．図2.3.1の要素 A について，x 方向の変位が x の一次関数で表現されると仮定すると，α_1 および α_2 を x に無関係な定数として

$$u = \alpha_1+\alpha_2 x \tag{2.3.1}$$

と書くことができる．u をマトリクスを用いて表現すると

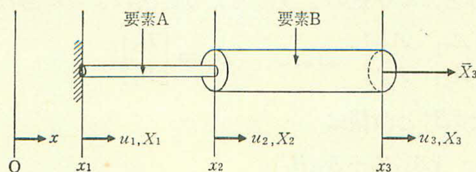
$$u = \lfloor 1 \quad x \rfloor \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \tag{2.3.2}$$

とも書くことができる．いま，図2.3.1において，要素 A の両端 $x=x_1$ および x_2 では変位がそれぞれ u_1 および u_2 と与えられているとすれば，(2.3.1)にこれらの数値を代入して

$$u_1 = \alpha_1+\alpha_2 x_1$$

および　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(2.3.3)

$$u_2 = \alpha_1+\alpha_2 x_2$$



	ヤング率	断面積	長さ
要素A	E_A	S_A	$l_A=x_2-x_1$
要素B	E_B	S_B	$l_B=x_3-x_2$

図2.3.1　2要素の棒および要素特性

あるいはマトリクスで表して

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \tag{2.3.4}$$

となる．上式から

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_A} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.3.5}$$

のように$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$が$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$と関係づけられる．(2.3.5)を(2.3.2)の右辺に代入すると

$$u = \frac{1}{l_A} \lfloor 1 \quad x \rfloor \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \equiv [N_A] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.3.6}$$

の関係を得る．ここに$[N_A]$は，要素内変位uを節点変位$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$と関係づけるための補間関数マトリクスであるといえる．このようにして，内部変位が，節点変位を用いることによって離散化されたことになる．有限要素法の基礎は，連続的な値（ここでは内部変位）を離散化された値（ここでは節点変位）に置換して（あるいは代表させて），この離散化された値について多元方程式を導き，これを電子計算機で解くことに帰せられる．なお，(2.3.4)から(2.3.5)に変換するときに，逆マトリクスを計算するので，節点変位の数とα_1, α_2で表現される定数の数を等しくしておかなければならない．

(2.3.6)は要素Aについての内部変位－節点変位関係式であるが，要素Bについても同様にして

$$u = \frac{1}{l_B} \lfloor 1 \quad x \rfloor \begin{bmatrix} x_3 & -x_2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$
$$\equiv [N_B] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{2.3.7}$$

の関係を得る．

2.3.2　要素の剛性マトリクス

さて，以上のようにして要素内変位が節点変位の関数として与えられたら，次に要素の剛性マトリクス（element stiffness matrix）を導く必要がある．要素の剛性マトリクスとは節点力と節点変位とを関係づけるマトリクスのことで，要素Aについては

$$\begin{Bmatrix} X_1{}^A \\ X_2{}^A \end{Bmatrix} = [K_A] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.3.8}$$

の関係がある．ここに，$[K_A]$が要素Aの剛性マトリクス，$X_1{}^A$, $X_2{}^A$は要素Aの両端に働く節点力を表している．なお，ベクトル$\lfloor X_1 \quad X_2 \rfloor$とベクトル$\lfloor u_1 \quad u_2 \rfloor$との関係は，その内積(スカラ積)が仕事を表すように決められる．

$[K_A]$の内容を求めるには，一般に仮想仕事の原理や最小ポテンシャルエネルギーの原理が用いられる．ここでは最小ポテンシャルエネルギーの原理を適用してみよう．この場合，(1.7.17)の右辺の各項は，物体力が働かないと仮定して次のようになる．

$$\begin{aligned}
\int_V A(u_i)dV &= \frac{1}{2}\int \varepsilon_x{}^T \sigma_x dV \\
&= \frac{S_A E_A}{2 l_A{}^2} \int_{x_1}^{x_2} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T \lfloor 0 \quad 1 \rfloor^T \lfloor 0 \quad 1 \rfloor \\
&\quad \times \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} dx \\
&= \frac{S_A E_A}{2 l_A} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T \lfloor 0 \quad 1 \rfloor^T \lfloor 0 \quad 1 \rfloor \\
&\quad \times \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\
&= \frac{S_A E_A}{2 l_A} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

$$\int_v \bar{F}_i u_i dV = 0 \tag{2.3.10}$$

および

$$\int_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS = X_1{}^A u_1 + X_2{}^A u_2 \tag{2.3.11}$$

(2.3.9)～(2.3.11)から(1.7.17)は

$$\Pi_p = \frac{S_A E_A}{2 l_A} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - (X_1{}^A u_1 + X_2{}^A u_2) \tag{2.3.12}$$

と書くことができる．ここで，Π_pがu_1およびu_2に関して最小となることから

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial u_1} = \frac{S_A E_A}{l_A} \lfloor 1 \quad -1 \rfloor \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - X_1{}^A = 0$$

および　　(2.3.13)

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial u_2}=\frac{S_A E_A}{l_A}\lfloor -1 \quad 1 \rfloor \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - X_2{}^A = 0$$

が必要である．上式をまとめると

$$\begin{Bmatrix} X_1{}^A \\ X_2{}^A \end{Bmatrix} = \frac{S_A E_A}{l_A}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.3.14}$$

となる．(2.3.14)と(2.3.8)を比べると

$$[K_A]=\frac{S_A E_A}{l_A}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3.15}$$

と書くことができる．要素 B についても同様にして

$$\begin{Bmatrix} X_2{}^B \\ X_3{}^B \end{Bmatrix} = \frac{S_B E_B}{l_B}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{2.3.16}$$

となる．ここに $X_2{}^B, X_3{}^B$ は，それぞれ要素 B の節点2と3に働く節点力である．また要素 B の剛性マトリクス $[K_B]$ は

$$[K_B]=\frac{S_B E_B}{l_B}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3.17}$$

となることは明らかである．なお剛性マトリクスは一般に対称マトリクスである．

2.3.3 系全体の剛性マトリクス

以上では，要素 A と B の剛性マトリクスをそれぞれ導いたが，次にこれらを合成して系全体の剛性マトリクスを作成しなければならない．この場合は，(2.3.14)と(2.3.16)とを節点力のつりあい条件を用いて結合することになる．すなわち，節点2においては要素 A と要素 B とが連結されており，この点で節点力はつりあっていなければならない．このことを式で表すと

$$X_2{}^A + X_2{}^B = 0 \tag{2.3.18}$$

ということになる．もし外部から外力がなんらかの形でこの節点に与えられていれば，上式の右辺はその外力値に置き換えられる．いま

$$k_A=\frac{S_A E_A}{l_A}, \quad k_B=\frac{S_B E_B}{l_B}$$

と置いて，(2.3.14)および(2.3.16)の $X_2{}^A$ あるいは $X_2{}^B$ の項を(2.3.18)に代入すると

$$0=-k_A u_1+(k_A+k_B)u_2-k_B u_3 \tag{2.3.19}$$

となる．また節点3では外力が $\bar{X}_3$ と与えられているから，(2.3.16)から

$$\bar{X}_3 = X_3{}^B = -k_B u_2 + k_B u_3 \tag{2.3.20}$$

となる．節点1における条件は後で考えることにして，(2.3.19)と(2.3.20)とを考慮して(2.3.14)および(2.3.16)を書き換えると，結局

$$\begin{Bmatrix} X_1{}^A \\ 0 \\ \bar{X}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_A & -k_A & 0 \\ & k_A+k_B & -k_B \\ \text{対称} & & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{2.3.21}$$

となる．上式の右辺の正方マトリクスを系全体の剛性マトリクス(system stiffness matrix)と呼ぶ．ここで上式の3×3の剛性マトリクスの行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} k_A & -k_A & 0 \\ & k_A+k_B & -k_B \\ \text{対称} & & k_B \end{vmatrix} = 0 \tag{2.3.22}$$

となることが確かめられる．このことは(2.3.21)を節点変位について解くことができないことに対応する．物理的には，構造物に変位の拘束が与えられていないために無限大の変位を生じてしまうことになる．このことを解決するにはたとえば節点1の変位を $u_1=\bar{u}_1$ となるように強制的に与えてやればよい．ここに $\bar{u}_1$ を0あるいは任意の強制値とする．すると(2.3.21)は

$$\begin{Bmatrix} X_1{}^A \\ 0 \\ \bar{X}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_A & -k_A & 0 \\ & k_A+k_B & -k_B \\ \text{対称} & & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{2.3.23}$$

と変形される．上式は u_2, u_3 および $X_1{}^A$ に関する三元連立一次方程式である．上式を解くために次のように部分マトリクスを用いて表現する．

$$\begin{Bmatrix} X \\ \bar{X} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & \tilde{k} \\ \tilde{k}^T & \hat{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ u \end{Bmatrix} \tag{2.3.24}$$

ここに

$$X = X_1{}^A,\ \ \bar{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{X}_3 \end{Bmatrix},\ \ \bar{u} = \bar{u}_1,\ \ u = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$
$$k = k_A,\ \ \tilde{k} = \lfloor -k_A \quad 0 \rfloor \ \ \text{および}\ \ \hat{k} = \begin{bmatrix} k_A+k_B & -k_B \\ \text{対称} & k_B \end{bmatrix} \tag{2.3.25}$$

上式において未知量は X および u である．

2.3.4 節点変位と反力の計算

(2.3.24)を書き直すと

$$X = k\bar{u} + \tilde{k}u$$

および　(2.3.26)

$$\bar{X} = \tilde{k}^T\bar{u} + \hat{k}u$$

となる．(2.3.26)の第二式から

$$u = \hat{k}^{-1}(\bar{X} - \tilde{k}^T\bar{u}) \qquad (2.3.27)$$

と未知変位ベクトル u が求められる．この場合，$\hat{k}$ は特異マトリクスとはならず，逆マトリクス $\hat{k}^{-1}$ が存在する．更に(2.3.27)を(2.3.26)の第1式に代入すると

$$X = k\bar{u} + \tilde{k}\hat{k}^{-1}(\bar{X} - \tilde{k}^T\bar{u}) \qquad (2.3.28)$$

として未知の力 X が決められる．なおこの X は反力と呼ばれる．

さて，$\bar{u}$ としてはしばしば0が用いられる．これはその節点で変位を生じさせない(固定)ことに相当する．この条件は対称性を表現する場合にも有効である．たとえば，**図 2.3.2** の上に示した構造物が形状も荷重もともに中央線に関して対称であるとしたとき，下図のように変位をある方向に完全に拘束することによって対称性を表現することができる．

$\bar{u}=0$ とおいた場合，(2.3.26)は明らかに

$$X = \tilde{k}u$$

および　(2.3.29)

$$\bar{X} = \hat{k}u$$

と簡単になる．上式の第2式から未知変位は

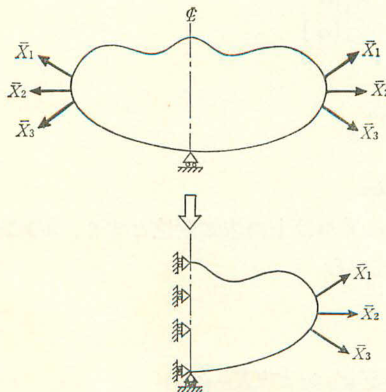


図 2.3.2　対称条件を表わすための変位拘束

$$u = \hat{k}^{-1}\overline{X} \tag{2.3.30}$$

また，(2.3.29)の第1式に(2.3.30)を代入して，反力は

$$X = \tilde{k}\hat{k}^{-1}\overline{X} \tag{2.3.31}$$

と求められる．

ここで(2.3.29)の第1式の形を見ると，未知変位 u を求めるには(2.3.24)において既知変位 $\overline{u}$ に対応する(あるいは反力 X に対応する)行と列とを除去すれば，(2.3.29)の第1式が得られることになる．すなわち

$$\begin{Bmatrix} X \\ \overline{X} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & \tilde{k} \\ \tilde{k}^{\mathrm{T}} & \hat{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u} \\ u \end{Bmatrix} \text{-----除去}$$

除去

⇩

$$\overline{X} \;=\; \hat{k} \quad u$$

という過程によって(2.3.24)から(2.3.29)の第1式が求められる．もし反力 X を求める必要があれば，(2.3.31)を更に計算すればよい．

既知変位を処理する方法として，上述の方法とともによく用いられるものに，対角要素へある大きな数($=\alpha$ とする)を代入して直接解く方法もある．(2.3.24)を例に採って

$$k \to \alpha, X \to \alpha\overline{u} \tag{2.3.32}$$

と置換を行うと，(2.3.22)は

$$\begin{Bmatrix} \alpha\overline{u} \\ \overline{X} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \tilde{k} \\ \tilde{k}^T & \hat{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u}' \\ u \end{Bmatrix} \tag{2.3.33}$$

あるいは

$$\alpha\overline{u} = \alpha\overline{u}' + \tilde{k}u$$

および　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(2.3.34)

$$\overline{X} = \tilde{k}^T\overline{u}' + \hat{k}u$$

と書ける．ここに $\overline{u}'$ は見かけ上の未知変位とする．$\alpha \gg \gg \hat{k}$ となるように α を選ぶと，上式の第1式から

$$\overline{u}' \fallingdotseq \overline{u} \tag{2.3.35}$$

また，第2式から

$$u = \hat{k}^{-1}(\overline{X} - \tilde{k}^T\overline{u}') \fallingdotseq \hat{k}^{-1}(\overline{X} - \tilde{k}^T\overline{u}) \tag{2.3.36}$$

が得られる．(2.3.27)と比べるとここで求められた解は α を $\hat{k}$ に比べて十分大

きく採れば正確な値になることがわかる．この方法を用いると，計算機の内部でマトリクスやベクトルの置き換えをせずに済むという利点がある．

2.3.5 要素のひずみと応力の決定

以上のようにして節点変位が求められたら，要素内の変位が各要素に対して求められる．たとえば，要素 A については(2.3.6)に節点変位 u_1 および u_2 を代入すればよい．要素内ひずみ ε_x は，要素 A については，(2.3.6)を x で微分して

$$\varepsilon_x{}^A = \frac{du}{dx} = \frac{1}{l_A}\lfloor 0 \quad 1 \rfloor \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.3.37}$$

と求められる．また，要素内応力 $\sigma_x{}^A$ は

$$\sigma_x{}^A = E_A \varepsilon_x{}^A = \frac{E_A}{l_A}\lfloor 0 \quad 1 \rfloor \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.3.38}$$

と計算される．要素 B についても同様にして $\varepsilon_x{}^B$ と $\sigma_x{}^B$ が求められる．

2.3.6 数値例

上述の問題について実際の数値を代入して解を求めてみよう．計算のための入力としては以下のものを考える．

$$\begin{aligned} &E_A = E_B = 20\,000\ \mathrm{kg/mm^2} \\ &S_A = 100\ \mathrm{mm^2},\ \ S_B = 200\ \mathrm{mm^2},\ \ l_A = l_B = 200\ \mathrm{mm} \\ &\bar{X}_3 = 1\,000\ \mathrm{kg},\ \ \bar{u}_1 = 0,\ \ x_1 = 0,\ \ x_2 = 200\ \mathrm{mm} \end{aligned} \tag{2.3.39}$$

および

$$x_3 = 400\ \mathrm{mm}$$

これから

$$k_A = \frac{S_A E_A}{l_A} = 10\,000\ \mathrm{kg/mm}$$

および (2.3.40)

$$k_B = \frac{S_B E_B}{l_B} = 20\,000\ \mathrm{kg/mm}$$

を得るので，(2.3.21)は

$$\begin{Bmatrix} X_1{}^A \\ 0 \\ 1\,000\ \mathrm{kg} \end{Bmatrix} = 10\,000\ \mathrm{kg/mm} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 3 & -2 \\ \text{対称} & & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{2.3.41}$$

となる．したがって，(2.3.25)は

$$X = X_1{}^A,\ \ \bar{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1\,000\,\mathrm{kg} \end{Bmatrix},\ \ \bar{u} = 0,\ \ u = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$k = 10\,000\,\mathrm{kg/mm},\ \ \hat{k} = \lfloor -10\,000\,\mathrm{kg}\quad 0 \rfloor \tag{2.3.42}$$

および

$$\hat{k} = 10\,000\,\mathrm{kg/mm}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \text{対称} & 2 \end{bmatrix}$$

となる．すると，(2.3.27)から

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{10\,000\,\mathrm{kg/mm}}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \text{対称} & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1\,000\,\mathrm{kg} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0.15 \end{Bmatrix}\mathrm{mm} \tag{2.3.43}$$

と節点変位を解くことができる．反力は(2.3.28)に(2.3.42)を用いて

$$X = -1\,000\,\mathrm{kg} \tag{2.3.44}$$

と計算される．この値は，当然のことながら $\bar{X}_3$ の値とつりあっている．

次に，要素内のひずみと応力を求める．要素 A 内のひずみ分布は(2.3.37)に(2.3.39)および(2.3.43)を代入すれば求めることができる．すなわち

$$\varepsilon_x{}^A = \frac{1}{200\,\mathrm{mm}}\lfloor 0\quad 1 \rfloor\begin{bmatrix} 200\,\mathrm{mm} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1\,\mathrm{mm} \end{Bmatrix}$$

$$= 0.0005 \tag{2.3.45}$$

また，要素 A 内の応力分布は，(2.3.38)から

$$\sigma_x{}^A = E_A\varepsilon_x = 10\,\mathrm{kg/mm^2} \tag{2.3.46}$$

同様に，要素 B については

$$\varepsilon_x{}^B = \frac{1}{200\,\mathrm{mm}}\lfloor 0\quad 1 \rfloor\begin{bmatrix} 400\,\mathrm{mm} & -200\,\mathrm{mm} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.1\,\mathrm{mm} \\ 0.15\,\mathrm{mm} \end{Bmatrix}$$

$$= 0.00025 \tag{2.3.47}$$

および

$$\sigma_x{}^B = E_B\varepsilon_x = 5\,\mathrm{kg/mm^2} \tag{2.3.48}$$

となる．

2.3.7 計算の流れ

図 2.3.3 に計算の流れをまとめておく．この流れ図は線形問題に対する有限

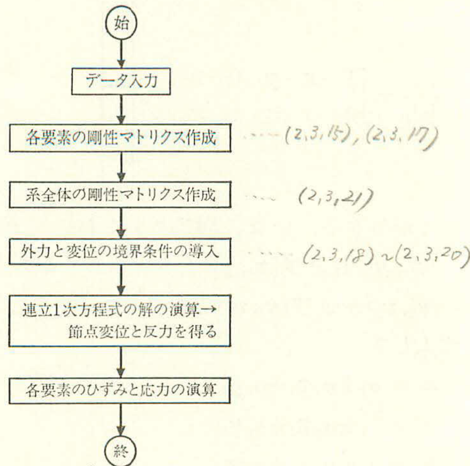


図 2.3.3 有限要素法の計算流れ図

要素法全般に共通するものである.

2.4 平面問題

前節では，有限要素法の解析手順を示すために棒の解析法について説明したが，ここでは連続体の有限要素解に対する最も簡単な例として，三角形要素による平面問題について解説する．この三角形要素は二次元問題解析の代表的なものであり，しばしば用いられている要素の一つである.

2.4.1 要素の変位関数

三角形平面要素のうち最も簡単なものは**図 2.4.1** に示すような 3 節点三角形平面要素である．いま，要素内の x, y 方向の変位分布を，それぞれ

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

および (2.4.1)

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

と仮定する．ここに $\alpha_1 \sim \alpha_6$ は前節の場合と同様に x, y 座標に無関係な定数である．マトリクスを用いると，上式は

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \tag{2.4.2}$$

と書くことができる．いま，図 2.4.1 において節点 1，2 および 3 の座標が (x_1, y_1), (x_2, y_2) および (x_3, y_3) と与えられ，その点での節点変位が，それぞれ (u_1, v_1), (u_2, v_2) および (u_3, v_3) と与えられているとすれば，(2.4.1) にこれらの数値を代入して

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ u_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ u_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \\ v_1 &= \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 y_1 \\ v_2 &= \alpha_4 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 y_2 \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

および

$$v_3 = \alpha_4 + \alpha_5 x_3 + \alpha_6 y_3$$

を得る．上式をマトリクス式で書き換えると

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \tag{2.4.4}$$

となる．ここに $[C]$ および $[0]$ は，それぞれ

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \tag{2.4.5}$$

および

$$[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4.6}$$

である．(2.4.4) から，逆マトリクスを用いて

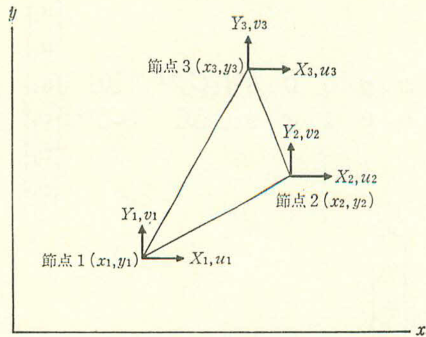


図 2.4.1 3 節点三角形平面要素

$$\begin{Bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\\\alpha_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[C] & [0]\\ [0] & [C]\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\v_1\\v_2\\v_3\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[C]^{-1} & [0]\\ [0] & [C]^{-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\v_1\\v_2\\v_3\end{Bmatrix} \tag{2.4.7}$$

の関係を得る．ここに

$$[C]^{-1}=\frac{1}{2S}\begin{bmatrix}x_2y_3-x_3y_2 & x_3y_1-x_1y_3 & x_1y_2-x_2y_1\\ y_2-y_3 & y_3-y_1 & y_1-y_2\\ x_3-x_2 & x_1-x_3 & x_2-x_1\end{bmatrix} \tag{2.4.8}$$

および

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix} \tag{2.4.9}$$

と計算される．S は三角形の面積に等しい．(2.4.7)を(2.4.2)に代入すると，結局

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C]^{-1} & [0] \\ [0] & [C]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\equiv [N] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{2.4.10}$$

の関係式を得る．ここに $[N]$ は，要素内変位を節点変位と関係づけるための補間関数マトリクスであり，(2.4.10)は前節の(2.3.6)や(2.3.7)に対応する．なお，前節の場合と同様に，この場合も節点変位の数と $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_6$ で表される定数の数はともに6個であり，同一数となっていることに注意されたい．

2.4.2 要素の剛性マトリクス

この場合の要素の剛性マトリクスは，前節の(2.3.8)に対応して，次式の $[K]$ で表される．すなわち

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} \equiv \{X\} = [K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \equiv [K]\{d\} \tag{2.4.11}$$

ここに $X_1, X_2, \cdots, Y_3$ は図2.4.1に示した節点力の成分である．ベクトル $\lfloor X_1 X_2 \cdots Y_3 \rfloor$ とベクトル $\lfloor u_1 u_2 \cdots v_3 \rfloor$ との関係はその内積が仕事となるように決められる．前節と同様に，$[K]$ の内容を決定するのに最小ポテンシャルエネルギーの原理を次に用いてみよう．この場合，(1.7.17)の右辺の各項は次のように計算される．ただし，物体力は働かないものとする．

$$\int_{\text{要素内部}} A(u_i)dV = \frac{1}{2}\int_{\text{要素内部}} \lfloor \varepsilon_{xy}\varepsilon_{yy}2\varepsilon_{xy} \rfloor \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\text{要素内部}} \lfloor \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}2\varepsilon_{xy} \rfloor [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} dV$$

$$= \frac{St}{2} \lfloor d \rfloor [B]^T [D][B]\{d\} \tag{2.4.12}$$

$$\int_{\text{要素内部}} \bar{F}_i u_i dV = 0 \tag{2.4.13}$$

および

$$\int_{\text{要素表面}} \bar{T}_i u_i dS = \lfloor X \rfloor \{d\} \tag{2.4.14}$$

ここに，t は要素板厚とする．また $[D]$ は

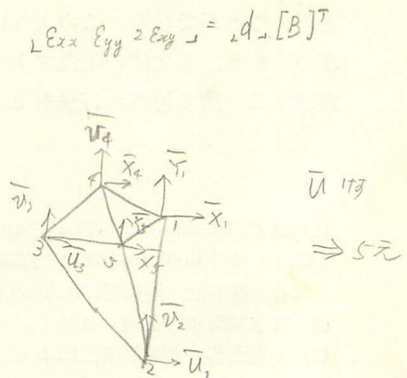
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.4.15}$$

で定義され，$[D]$ の内容は(1.1.12)などから求められる．$[B]$ は，ひずみ成分と節点変位を関係づけるマトリクスであり，(2.4.10)を用いて次式で定義される．

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

// $[B]\{d\}$



$$=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[C]^{-1}&[0]\\ [0]&[C]^{-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\v_1\\v_2\\v_3\end{Bmatrix}$$

$$\equiv[B]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\v_1\\v_2\\v_3\end{Bmatrix} \qquad (2.4.16)$$

(2.4.12)～(2.4.14)を(1.7.17)に代入すると，要素のポテンシャルエネルギーΠ_pは

$$\Pi_p=\frac{St}{2}\lfloor d\rfloor[B]^T[D][B]\{d\}-\lfloor X\rfloor\{d\} \qquad (2.4.17)$$

と計算される．ここでΠ_pが節点変位ベクトル$\{d\}$に関して最小となることから

$$\frac{\partial\Pi_p}{\partial\{d\}}=St\lfloor d\rfloor[B]^T[D][B]-\lfloor X\rfloor=0 \qquad (2.4.18)$$

上式の転置をとると

$$\{X\}=St[B]^T[D][B]\{d\} \qquad (2.4.19)$$

となる．(2.4.19)を(2.4.11)と比較すると

$$[K]=St[B]^T[D][B] \qquad (2.4.20)$$

と書くことができる．このようにして，3節点三角形要素の剛性マトリクスが求められる．系全体の剛性マトリクスの導き方および要素のひずみと応力の決定法は2.3節で述べた方法をそのまま拡張すればよい．

参考文献

(1) O. C. Zienkiewicz : The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill Book Co., 1972（吉識雅夫・山田嘉昭監訳：基礎工学におけるマトリックス有限要素法，培風館，昭和50年）．

(2) 日本鋼構造協会編：コンピュータによる構造工学講座，全22分冊，培風館．

(3) 矢川元基：有限要素法におけるモデル化と原子力工学，日本原子力学会誌，**16**, pp. 614～620, 1974.

3. 原子炉構造物の破壊現象

原子炉構造物の設計において，使用材料の使用温度がクリープ域以下の場合には疲れ破壊とぜい性破壊とを考慮しなければならず，使用温度がクリープ域にある場合には疲れ破壊とクリープ破断とを考慮しなければならない．前者の場合には，軽水炉がその例として考えられ，後者の場合には，高速増殖炉・高温ガス炉がその例として挙げられよう．

本章においては，疲れ破壊とぜい性破壊の基礎的内容について述べる．疲れ破壊とぜい性破壊とが原子炉の設計にどのように取り入れられているかは次の第4章で述べられる．またクリープ破断については，第5章で述べられる．

3.1 疲れ破壊

3.1.1 疲れ破壊とは何か

構造材料を含めた広範な材料に，広義の荷重が繰り返して負荷されると，その材料は破壊する．広義の荷重とは，機械的な外荷重はもとより，温度こう配に由来する熱荷重や物体力としての電磁力なども含まれる．材料に応力が負荷されると，金属結晶の場合ではその中にすべり線が発生して微小き裂に成長する．応力の負荷が継続すると微小き裂は更に成長し，ついには複数のき裂どうしが結合し合って疲れ破壊が生ずることになる．降伏点以下の応力の繰返しの場合には一般的に巨視的な塑性変形を伴わない．微視的に見た場合，疲れ破壊の場合は粒内破壊であり，引張試験などで生じた破壊の場合とは異なる．このような破壊様式の違いは，破壊の原因が定常荷重にあるのか，繰返し荷重にあるのかを決定する根拠を提供する．

疲れ破壊現象を詳細に観察してみれば，その過程は二つの異なった段階に分

類できる．すなわち，き裂発生とき裂伝播とに分けられる．いうまでもなく，応力の繰返しによって微視的き裂が同時に多数発生し，しだいにそれらが結合して巨視的き裂に成長する．これまでの過程がき裂発生と呼ばれるものである．それ以後の応力の繰返しによって，巨視的き裂はその大きさを拡大する．場合によっては複数個の疲れき裂が伝播し，やがては巨視的な材料の疲れ破壊をもたらす．そのような過程を伝播と呼ぶ．

たとえば，平滑試験片(切欠きなしの試験片)の疲れ試験の場合には，き裂伝播は全寿命(破断までの応力の繰返数)の5％から10％を占めていて，それほど重要とは思われない．一方，切欠き付試験片のき裂伝播寿命は全寿命の大部分を占めている．これは，試験片に先在した初期欠陥(人工的切欠き)が存在するため応力集中が生じ，き裂発生寿命が短くなったためと解釈できる．

原子炉構造物，とりわけ原子炉圧力容器の疲れ破壊を問題にする場合，低サイクル疲れ強さが重要である．負荷応力が高くなると，当然のことながら破壊までの繰返数(これを疲れ寿命と呼ぶ)が少なくなる．したがって通常は低サイクル疲れ破壊と高サイクル疲れ破壊とに分けて考える．前者は高応力疲れとも呼ばれ，後者は低応力疲れとも呼ばれる．両者は後に述べるように，試験の方法に違いが見られる．一般的な試験においては，低サイクル疲れにおける試験条件はひずみ制御形(ひずみ値を一定に保つ)であり，高サイクル疲れにおける試験条件は荷重制御形か応力制御形である．

後に述べるように，原子炉圧力容器では低サイクル疲れ設計を行う必要があるため，特に低サイクル疲れが重要である．あるいは高温構造物の設計においては，低サイクル疲れとクリープの相乗効果が非常に重要となる．1サイクルの荷重履歴において，負荷状態の保持時間が長くなれば，疲れ強さは保持時間の影響を受ける．したがって高温構造物においては，低サイクル疲れのほかにクリープの影響が特に重要となるが，これについては後に述べる．

3.1.2 高サイクル疲れ

高サイクル疲れとは，おおよその目安として破壊までの寿命が10^5回を越える場合についていわれる．低サイクル疲れ破壊が構造物の設計において特に問題視されるようになったのは，原子炉構造物に対してであり，したがってその研究の歴史はおおよそ20年にも満たない．それに対して高サイクル疲れに関する研究の歴史は古く，1858年Wöhler* によって発見された鉄道レールの疲

れ破壊の発見に始まるとされている．それ以後なされてきた研究の多くは，疲れ限度に及ぼす各種因子の影響に関するものであった．疲れ限度とは，引張力と圧縮力とが交互に無限回負荷されたとしても，金属の疲れ破壊を引き起こすことがない最大の応力として定義される．このような疲れ限度はすべての金属材料について存在するわけではない．たとえばアルミニウム合金の場合には，鉄鋼材料に見られるような明確な疲れ限度は存在しない．

* A. Wöhler : Zeit für Bauwesen, Engineering, 8, 1858.

疲れ試験結果は通常**図 3.1.1** に示されるように，縦軸に応力振幅(全応力範囲の半分)を，横軸に破断までの繰返数を採って表示される．多くの工業用鉄鋼材料の場合，繰返数が 10^6 と 10^7 の間で S–N 曲線(いわゆる疲れ曲線と呼ばれるもので，S は応力を N は破断までの繰返数を表す)は明確な屈曲を示す．フェライト系鋼の疲れ曲線は屈曲点を過ぎるとほとんど平たんになり，先に述べた疲れ限度が存在することを示している．繰返数が 10^9 回までの試験結果によれば，疲れ限度はおおよそ $N=10^7$ 回の近くで現れ，しかもそれ以上繰返数を増しても破壊応力の減少は期待されないという事実が確認された．この試験結果は空気中でしかも室温で得られたものであり，試験環境が異なると結果は多少異なることが期待される．たとえば，フェライト系鋼を高温で試験した場合や，ある種の溶接部の場合には真の疲れ限度は見られない．しかしながら，$N=10^7$ を過ぎると破壊応力の低下はきわめて緩慢である．そのような材料に対して，実用的には $N=10^8$ における破壊応力を疲れ限度として使用することができる．構造物の耐用寿命を半永久として考える場合には，疲れ設計は使用材料の疲れ限度に基づいてなされる必要がある．

高サイクル領域においては，疲れ限度は材料の疲れ挙動の特徴を示す物理量

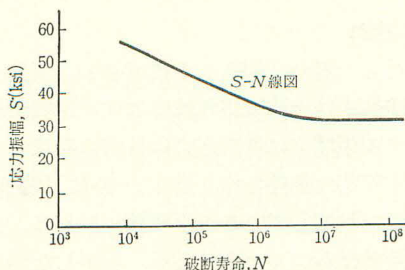


図 3.1.1 高サイクル疲れ線図

である．疲れ限度が高い材料は疲れ強さが優れているといわれるが，後に述べる切欠き感度が高ければ実用価値は劣ることになる．多くの場合，溶接構造物は溶接欠陥などの先在切欠きを含むとして設計したほうが妥当であり，そのような切欠きから疲れき裂が発生して成長する過程を想定した場合，疲れ限度の低下は当然起るものと考える必要がある．その低下の程度を示したものが切欠き感度であり，切欠き感度の高い材料は疲れ限度の低下率が大きいのが普通である．低強度鋼と中強度鋼の疲れ限度は通常引張強さの40%と50%の間にあるといわれている．また高力鋼や非鉄金属の場合は，その割合は著しく低くなるともいわれている．

一方，疲れ限度に対して時間強さという考え方がある．たとえば，構造物の耐用寿命がはっきりしていて，荷重の繰返数が 10^7 より小さければ，使用材料の疲れ強さを疲れ限度より大きく採ることができる．その大きさは S–N 曲線から求めればよいことになり，いわゆる時間強さと呼ばれている．したがって $N=10^5$ に対する時間強さは図3.1.1の場合には約 $S=45$ kg/mm^2 となるのである．高サイクル疲れ領域にあっては，材料は弾性挙動を示す．したがって応力とひずみは一対一に対応する．そのような疲れ試験の場合には，応力を一定に保つ応力制御試験と，ひずみを一定に保つひずみ制御試験とは等価である．一方，しばしば採用される，荷重を一定に保つ荷重制御試験は，応力制御試験と異なる．つまり，疲れき裂が進展していないときには，応力一定の条件が満足されているが，疲れき裂が進展し，試験片の断面積が減少すれば，実断面応力(荷重を破壊していない実断面積で除した値)は徐々に高くなる．したがって，疲れ試験結果を解釈する場合，試験方法がどのようなものであったかに常に注意を払う必要がある．

3.1.3 低サイクル疲れ

応力制御の試験を行った場合，図3.1.1に示された疲れ曲線の $N<10^5$ の領域では，得られた実験結果は一般に信頼性に欠け，試験結果も大きなばらつきを示す．この低サイクル領域では負荷応力は材料の降伏応力を越えており，塑性降伏が試験片内に不安定な条件を作り出すために，制御条件が不正確になる．どのような物理量を制御しているか不明確になれば，当然得られた試験結果はデータ整理の段階でばらつくと思われる．しかしながら，この領域でひずみ制御の試験を行えば信頼性に富んだ試験結果が得られる．その試験結果の例

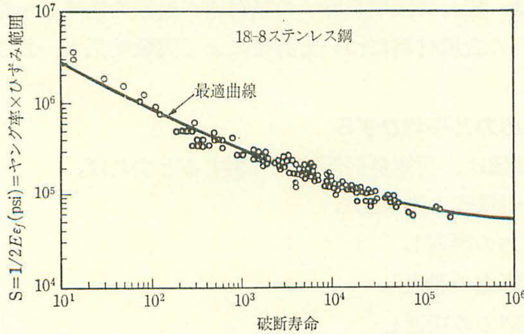


図3.1.2 ステンレス鋼の低サイクル疲れ曲線(ASME Code Section III)

を図3.1.2* に示す．これは ASME Code Section III の中に示されている疲れの設計曲線である．

* ASME : Boiler and Pressure Vessel Code, Section III, 1965.

多くの圧力容器は，使用期間中におおよそ 10^5 サイクル以上の負荷に耐えることは要求されないので，低サイクル疲れが主として問題にされる．いうまでもなく低サイクル領域を正確に定義することはできないが，下限としては数十サイクルを，上限としては数十万サイクルを考えればよいようである．高温で使用する場合は，クリープ現象が疲れ挙動を非常に複雑にする．クリープと疲れとの複合効果は別に検討するので，ここではクリープが生じない温度領域での低サイクル疲れ強さを取り扱うことにする．

Manson* は広範な材料を用いて行った低サイクル疲れ試験結果から，ひずみ(ε)と寿命(N)との間に次の関係式が存在することを示した．

$$\varepsilon \cdot N^m = \text{一定} \qquad (3.1.1)$$

ここで m は材料定数である．

* S. S. Manson : "Behavior of materials under conditions of thermal stress," NACA, TN 2933, 1953.

Tavernelli と Coffin* は変数として全ひずみ(ε=塑性ひずみ ε_p+弾性ひずみ ε_e)を採らずに，塑性ひずみ成分 ε_p を採ると実験結果を正確に表現できることを示した．彼らの実験式は次のとおりである．

$$\varepsilon_p \cdot N^{1/2} = \text{一定} \qquad (3.1.2)$$

* J. F. Tavernelli and L. F. Coffin : "A compilation and interpretation of cyclic strain fatigue test on metals," Transactions of ASM, 1959.

この関係式は，疲れに関する多くの経験式が近似的性能しか持っていないのに反して，多くの金属材料について非常によく実験結果と一致する．

3.1.4　平均応力と平均ひずみ

疲れ試験の種類は，荷重負荷形式で分類するとすれば，

(1)　圧縮－引張応力の繰返し

(2)　曲げ応力の繰返し

(3)　せん断応力の繰返し

(4)　ねじり応力の繰返し

の4通りが存在し，試験片の形状もそれぞれの荷重負荷形式に対応してある程度決定される．たとえば，引張圧縮応力を負荷する試験片としては，丸棒試験片や板状試験片がある．ねじり応力を負荷する試験片としては丸棒試験片が普通採用されている．

そのような応力値の時間変化を示すと図3.1.3のようになる．いま，$\sigma_{\max}$を1サイクル中の代数的な最大応力値，$\sigma_{\min}$を1サイクル中の代数的な最小応力値，σ_mを平均応力，σ_aを応力振幅，σ_Rを応力範囲と定義すると，次の関係式が成立する．

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \tag{3.1.3}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2}\sigma_R = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \tag{3.1.4}$$

次に応力比をRとすれば，Rは次のように定義される．

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

$R = -1$の場合を完全両振試験

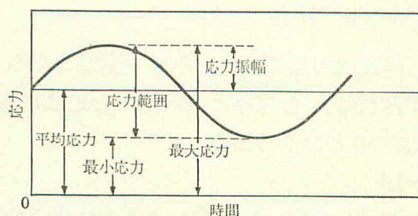


図3.1.3　応力値の時間変化

$R=0$ の場合を完全片振試験

という．R がそれ以外の値を採るときには，一般に部分片振試験と呼ばれる．

以上は応力に関して定義したが，ひずみに関しても同様の定義を行うことができる．たとえば，平均値，ひずみ振幅に関しても(3.1.3)と(3.1.4)とは σ を ε に変えれば同様に成立する．

3.1.5 高サイクル疲れ強さに及ぼす平均応力の効果

たとえば平均応力の疲れ限度に及ぼす効果は，**図 3.1.4** に示されるような線図上に実験データをプロットすることによって表示される．この図では横軸に平均応力成分 σ_m を採り，縦軸には応力振幅成分 σ_a を採っている．いま引張強さ σ_u を横軸に採り，疲れ限度を縦軸上に採って2点を直線で結ぶ．これを修正 Goodman 線図と呼ぶ．この直線上の任意の点で与えられる平均応力と応力振幅とを試験片に繰返し負荷してやると，疲れ限度($\simeq 10^7$ サイクル)に達した後破壊する．また，完全両振りの疲れ限度は $\sigma_m=0$ に対する σ_a の値で与えられる．実験結果によれば，圧縮応力は疲れ限度にほとんど影響を及ぼさない．むしろ，圧縮応力は疲れ限度を高める効果があるといえる．これらの実験事実をふまえて，Peterson は次式で示されるような三乗則を提案している．

$$\sigma_e = \frac{7\sigma_a}{8-\left[1+\dfrac{\sigma_m}{\sigma_u}\right]^3} \tag{3.1.5}$$

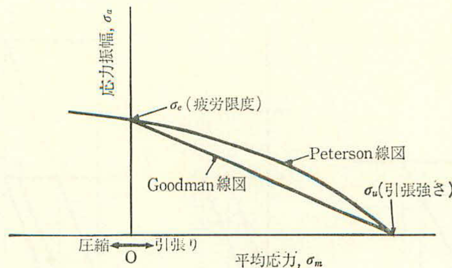


図 3.1.4 疲労強度に及ぼす平均応力の影響

3.1.6 低サイクル疲れ強さに及ぼす平均応力の効果

圧力容器においては，疲れ限度よりは有限回の繰返しで破壊が生じるような応力レベルのほうが問題になる．この応力レベルは多くの場合，降伏応力より

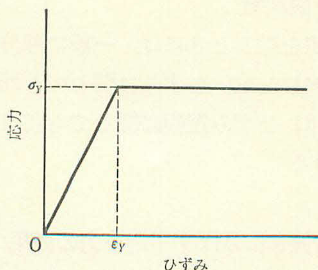


図 3.1.5　完全弾塑性体の応力-ひずみ線図

高いため，変動応力によってひき起こされる材料の塑性挙動を考慮しなければならない.

議論を簡単にするため，材料は完全弾塑性体であると仮定する．その応力-ひずみ関係式は図 3.1.5 に示される.

材料が繰返荷重を受けたとき生じる材料の弾塑性挙動は図 3.1.6 に示されるように次の三つの場合に分類される.

(a)　ひずみ ε_1(または応力 σ_1)が弾性範囲内にある.

(b)　ひずみ ε_1 が降伏ひずみ(ε_Y)より大きく，2 倍の降伏ひずみよりは小さい.

(c)　ひずみが降伏ひずみの 2 倍より大きい.

低サイクル疲れの場合，(b)と(c)とのケースが重要であり，それらを模式的に

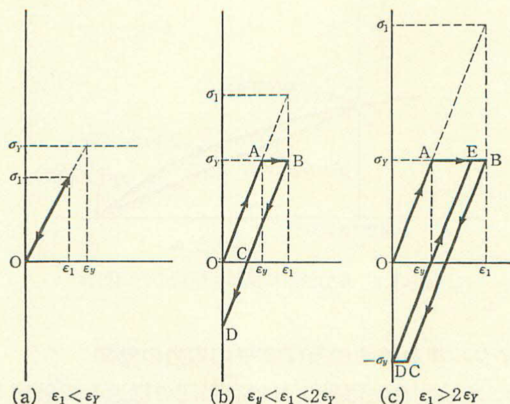


図 3.1.6　材料の弾塑性挙動

示すと図1.3.6のようになる．図3.1.6(b)はひずみが0からε_1まで繰り返されたときの応力-ひずみ履歴を示しており，ε_1は次の条件を満足している．

$$\varepsilon_y < \varepsilon_1 < 2\varepsilon_Y$$

ここに，ε_Yは降伏ひずみである．

初めの1サイクルで材料はOからAまで弾性的に伸び，AからBまで塑性的に伸びる．次にBからCまで除荷され，更にCからDまで圧縮される．それ以降のサイクルでは，材料は直線DB上を往復する．この場合の平均応力の値は

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1}{2}$$

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1$$

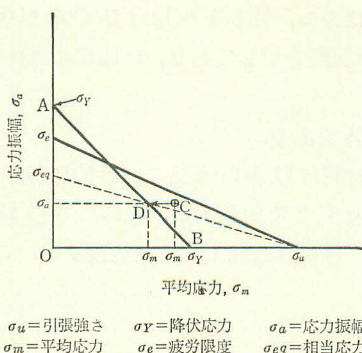
で与えられるのではなく，実際には

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{\sigma_1}{2} - (\sigma_1 - \sigma_Y) \\ &= \sigma_y - \frac{\sigma_1}{2} = \sigma_Y - \sigma_a \qquad (3.1.6)\end{aligned}$$

となる．図からも明らかなように，この場合の平均応力の減少は$(\sigma_1 - \sigma_Y)$なので，それはピーク応力(σ_1)が降伏応力を越えている量に等しい．

もし，$\varepsilon_1 > 2\varepsilon_Y$のときには，応力-ひずみ履歴は図3.1.6(c)のようになる．初めOABと進み，BからCまで除荷・圧縮される．圧縮応力の増加を伴わないでCからDまで進む．それ以降の繰返しでは，平行四辺形DEBCDに沿って進行し，実際の平均応力は0となる．

高サイクル疲れにおける平均応力の増大は疲れ限度を減少させるが，負荷応力が塑性域に入ったときには平均応力は疲れ強さにほとんどまたは全く影響を与えないということが予想される．これらのことは実験結果とよく一致している．ある場所の応力状態が塑性状態に移行するのは，切欠きや欠陥などの幾何学的不連続部においてはしばしば見られる．そのような部分の平均応力の効果は，上記の原理を適用して次のように修正される．**図3.1.7**で，横軸と縦軸上の降伏応力の値を結んだ傾斜が45°の直線ABは，(3.1.6)から明らかなように，平均応力と応力振幅との組合せの上限を示す．応力サイクルがどのような状態で始まったとしても，数回繰り返された後の真の応力状態は，三角形OABの間にあるか，Aより上方の縦軸上にあるはずである．なぜなら，応力



σ_u＝引張強さ　σ_Y＝降伏応力　σ_a＝応力振幅
σ_m＝平均応力　σ_e＝疲労限度　σ_{eq}＝相当応力

図 3.1.7　降伏による平均応力の減少

が大きくなりひずみ値が $2\varepsilon_Y$ を越えた場合には，平均応力は先に述べた理由によって0になるからである．もし応力状態がこの三角形の外にある場合〔図3.1.7で点Cにあるとき〕には，平均応力は直線ABに達する点Dまで減少する．したがって設計に際しては次のように平均応力を修正する必要がある．

(1)　$\sigma_a+\sigma_m\leqq\sigma_Y$ のとき

$$\sigma_m'=\sigma_m \tag{3.1.7}$$

(2)　$\sigma_a+\sigma_m>\sigma_Y$ でかつ $\sigma_a<\sigma_Y$ のとき,

$$\sigma_m'=\sigma_Y-\sigma_a \tag{3.1.8}$$

(3)　$\sigma_a\geqq\sigma_Y$ のとき

$$\sigma_m'=0 \tag{3.1.9}$$

ここに，σ_m' は修正後の平均応力値を表す．

次に，与えられた問題における応力条件が部分片振りである場合，完全両振試験結果から，そのときの寿命を推定することを考えてみる．与えられた応力条件は(σ_a, σ_m)とする．これと等価な完全両振りの応力条件を$(\sigma_{eq}, 0)$とする．図3.1.7において，σ_{eq} は，横軸上の σ_u なる点と点Dとを結び，それを延長して縦軸との交点を求めれば，その点の値が σ_{eq} を与えることになる．したがって，σ_{eq} は

$$\sigma_{eq}=\frac{\sigma_a}{1-\sigma_m/\sigma_u} \tag{3.1.10}$$

で与えられることになる．このことの妥当性は修正Goodman線図によって保証される．

3.1.7 低サイクル疲れ強さに及ぼす平均ひずみの効果

結論から先にいえば，平均ひずみは疲れ寿命にほとんど影響を及ぼさない．たとえば Gross* らは，0 から ε_{max} までのひずみの繰返しを受けた試験片と，繰返し曲げひずみを受けた試験片との疲れ寿命の間にはほとんど差が見られなかったという実験結果を報告している．

* J. H. Gross et al. : "Factors affecting resistance of pressure vessel steels to repeated overloading," Welding J. Res. Suppl., **32**, No. 1.

低サイクル疲れ曲線は，通常次式で整理されることが多い．

$$\varepsilon_{tR} = C_e N^{-k_e} + C_p N^{-k_p} \tag{3.1.11}$$

ここに，ε_{tR} は全ひずみ範囲，C_e, C_p, k_e, k_p は材料定数である．低サイクル疲れ試験において，全ひずみ成分を弾性ひずみ成分，塑性ひずみ成分に分割すれば，

$$\varepsilon_{tR} = \varepsilon_e + \varepsilon_p \tag{3.1.12}$$

となり，これらのひずみ成分と寿命との間には，それぞれ次式が実験的に成立する．

$$\varepsilon_e \cdot N^{k_e} = C_e \tag{3.1.13}$$

$$\varepsilon_p \cdot N^{k_p} = C_p \tag{3.1.14}$$

(3.1.12), (3.1.13), (3.1.14) から (3.1.11) が導かれることは明らかである．それらの実験結果の例を**図 3.1.8** に示す．材料は 80 キロ級高張力鋼である．同図に示されたひずみの値は範囲で示されている*．

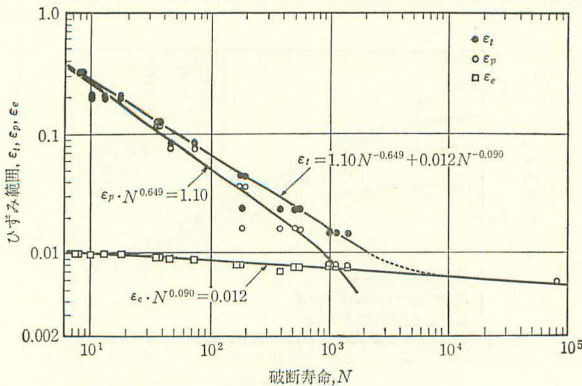


図 3.1.8 成分ごとに示された疲れ曲線

* 堀田・宮ほか：鋼材の歪制御低サイクル疲労強度推定に関する研究，日本造船学会論文集，第128号，昭和46年.

塑性ひずみ成分に比べれば弾性ひずみ成分は小さいので，それを無視すれば，(3.1.11)は(3.1.14)で近似できる．そして(3.1.14)は，$N=1$ に相当する引張試験にも適用できるとすれば，そのときのひずみは破壊時の真ひずみ ε_f に等しいと考えることができるから，

$$C_p = \varepsilon_f \tag{3.1.15}$$

となる．したがって(3.1.14)は

$$N^{k_p} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_p} \tag{3.1.16}$$

のように書き直せる．

いま，疲れ試験に先だって与えられる永久ひずみの効果を考えることにする．この永久ひずみは施工段階で与えられる予ひずみ，あるいはラチェット現象によって累積された永久ひずみがその例として挙げられる．この永久ひずみが破壊延性 ε_f の中で大きな割合を占める場合には，平均ひずみと繰返しひずみ範囲がほぼ同程度の値で，かつ破壊延性に比べて小さい場合に見られる状況と事情が全く異なる．永久ひずみの値を ε_0 とすれば，残存の破壊延性は$(\varepsilon_f-\varepsilon_0)$に等しいと考えられるから，結局(3.1.16)は次のように修正されるべきである．

$$N^{k_p} = \frac{\varepsilon_f-\varepsilon_0}{\varepsilon_p} \tag{3.1.17}$$

(3.1.17)の妥当性は Sachs や Sessler らによって実験的に証明された*．セス

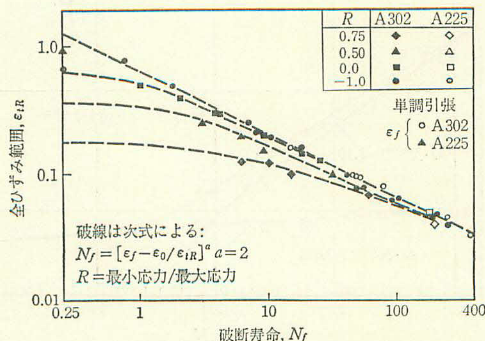


図 3.1.9 永久ひずみの影響

ラーらの実験結果の例を**図 3.1.9** に示してある．破線が(3.1.17)によるものであり，それと実験結果との一致はたいへん良好であることがわかる．

* G. Sachs, W. W. Gerberich et al. : "Low cycle fatigue of pressure vessel materials," ASTM Proc., 60, p. 512-29.
J. G. Sessler and V. Weiss : "Low cycle fatigue damage in pressure vessel materials.," ASME Paper, No. 62-WA-233, 1962.

3.1.8 切欠き効果

圧力容器の疲れ破壊の多くは，種々の切欠きと深く関係しており，それらの切欠きが疲れ強さに及ぼす影響について考える必要が生じてくる．そのような切欠きの例としては，種々の溶接欠陥や幾何学的不連続部などを挙げることができる．

外力の繰返しによって切欠きから疲れき裂が発生して進展する場合に重要なことは，切欠き先端の応力集中度(応力集中係数と呼ばれる)を正確に評価することである．切欠き形状が既知でかつ応力集中係数が明らかな場合には，公称応力(外荷重を切欠き断面をも含む公称断面で割った値)に応力集中係数(K_t)を掛けてき裂発生に関する疲れ曲線から割れ発生までの寿命を決定すればよいことになる．弾性応力集中係数は理論的に求めることも可能であるし，それができない場合には，光弾性実験などから実験的に求めることができる．Peterson* は広範囲の切欠き形状に対する弾性応力集中係数に関するハンドブックを公表している．

* R. E. Peterson : Stress Concentration Design Factors, John Wiley, New York, 1953.

切欠きが存在する場合，疲れ強さが低下するのであるが，その低下量は次の疲れ強さ減少係数，K_f で定義される．

$$K_f = \frac{S_0(\varepsilon_0)}{S_n(\varepsilon_n)} \qquad (3.1.18)$$

$S_0(\varepsilon_0)$：平滑試験片(K_t=1.0)の寿命 N における疲れ破壊応力(ひずみ)

$S_n(\varepsilon_n)$：切欠き付試験片($K_t=K_t$)の寿命 N における疲れ破壊応力(ひずみ)

従来の高サイクル領域での通念は $K_f \leq K_t$ でかつ，低サイクル領域でも荷重制御試験であれば，$K_f \leq K_t$ という関係は成立するとされている．

図 3.1.10 に応力制御とひずみ制御との比較例を模式的に示す．曲線 A, B, C はそれぞれ，平滑材のひずみ制御，平滑材の応力制御，切欠き材の応力制御の

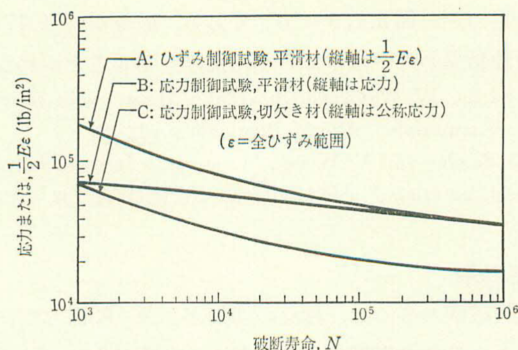


図 3.1.10　応力制御試験結果とひずみ制御試験結果の関係

試験結果を示している．曲線BとCとの縦軸の比は破断寿命が小さければ小さい．したがって低サイクル領域では，疲れ強さ減少係数は小さく採ってよいことになる．このことはまた見掛け上の応力集中係数を低く採ってよいことに対応する．一方，曲線AとCとの縦軸の比は一定である．このことは，平滑材試験片の公称ひずみ範囲に定数を掛けたものは，切欠き底の繰返しひずみと同じ疲れ損傷を与え，かつその定数は寿命に無関係に一定である，ということを示している．

これからもわかるように，理論応力集中係数は必ずしも切欠きが構造物に与える強さ減少を正しく表さない．切欠き底における疲れ強さは，ピーク応力だけでなく，応力こう配，塑性域に入った場合には，加工硬化指数といった特性などによっても影響を受けると考えられるからである．疲れ強さ減少係数と応力集中係数 K_t との関係を示すものが切欠き感度 q と呼ばれるものである．q は次式で定義される．

$$q=\frac{K_f-1}{K_t-1} \tag{3.1.19}$$

この係数 q は0と1の間の値をとり，$q=0\,(K_f=1)$ のときは，材料は切欠きの作用に鈍感であり，$q=1(K_f=K_t)$ のときには，切欠き効果は理論的予測値と一致する．

一方，切欠き底における応力値が降伏応力より大きいときに見られる応力集中係数とひずみ集中係数とはかなり違う．**図 3.1.11** には，円孔付平板引張試験片の公称応力に対する応力集中係数とひずみ集中係数との変化を示している*．切欠き底が降伏し始めると，応力集中係数は減少し，ひずみ集中係数 K_ε

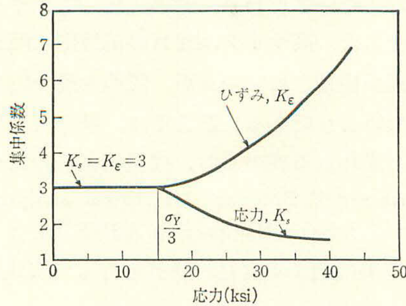


図 3.1.11　円孔の応力集中係数とひずみ集中係数

は増大する．K_ε は K_f が K_t より大きい場合を説明する根拠を与える．

* E. Kremple : "Low-cycle fatigue strength reduction in notched plates," GEAP-5410, AEC Res. & Dev. Report, January, 1967.

3.1.9　疲れき裂の伝播

荷重の繰返しによって発生したき裂がどのような過程を経て漏洩もしくは不安定破壊(unstable fracture)を引き起こす限界寸法に達するかを知ることは，疲れ強さ減少係数を求める場合より実用的である場合がしばしばある．たとえば，構造物には溶接時に生じた溶接欠陥などが先在すると考えたほうが妥当な場合がよくある．そのような構造物に繰返し荷重が負荷された場合，溶接欠陥から疲れき裂が発生し，かつ伝播することが考えられる．その場合，疲れき裂発生までの寿命と，疲れき裂が伝播してゆく速度が特に問題となる．圧力容器の場合，先在欠陥の有無を確認するため，比較的厳重な非破壊検査を実施する．しかしながら，検出できる欠陥寸法には下限があるので，すべての圧力容器はたとえ小さくてもなんらかの欠陥を有していると仮定する必要がある．多くの場合，欠陥の鋭さに関する情報は得られないので，欠陥は非常に鋭いと仮定する必要がある．Coffin によって確かめられたように，欠陥がどんなに鋭くても，それ以下ではき裂が伝播しない欠陥寸法と応力の最小値がある．多くの圧力容器は低サイクル領域で使用されるため，負荷応力がき裂伝播ゼロの値を越えていてもき裂伝播距離が短く，それほど問題にならない場合もある．

これまでに，き裂進展速度を予測するための研究が精力的に行われた結果，いくつかの推定式が提案された*．もちろん，き裂進展速度に関する研究は初

め高サイクル疲れ破壊について行われ，近年になって低サイクル疲れ破壊に関して行われるようになった．高サイクル疲れの伝播則に関しては，多くの実験式・半実験式・理論式が提案されているが，現象を統一的に説明できる推定式は今のところ存在しないようである．ここでは，限られた条件のもとでよく実験事実を説明できると思われる式のうち，代表的なものについて説明する．

* P. C. Paris and F. Erdogan : "A critical analysis of crack propagations laws," J. Basic Engineering ASME, 85, 2, 1963.

Head* は疲れき裂進展に関する理論的研究を行って次式を導いた．

$$\frac{dl}{dN}=\frac{\sqrt{l_0^3}}{\sqrt{d}}f(\sigma_a) \tag{3.1.20}$$

ここに，l_0 はき裂半長，N は繰返数，σ_a は繰返応力，d は塑性変形域の大きさである．

* A. K. Head : "The propagation of fatigue cracks", Journal of Applied Mechanics, 78, 7, 1956.

また，Frost, Dugdale によって塑性変形域の大きさ "d" は，き裂半長 l に比例することが実験的に確かめられている．そうすると，(3.1.20)は次のようになる．

$$\frac{dl}{dN}=C\sigma_a{}^3 l \tag{3.1.21}$$

ここに，C は平均応力に依存する材料定数である．上の関係式はき裂長さが試験片幅の 1/10 以上になると適用できない．

低サイクル疲れの場合は，大きな塑性変形を伴うので，異なる伝播則が成立する．Boettner ら*は，ひずみ強さ係数として $\varepsilon_r\sqrt{l}$ を定義して次式を導いている．

$$\frac{dl}{dN}=A(\varepsilon_r\sqrt{l})^n \tag{3.1.22}$$

ここに，A は材料定数，l はき裂長さ，ε_r は引張りひずみと圧縮ひずみの和，n は材料に無関係な値で約 2 に等しい．

* R. C. Boettner, C. Laird et al. : "Crack nucleation and growth in high strain-low cycle fatigue", Transactions of the Metallurgical Society of AIME, 233, 1965.

最近，き裂の伝播速度と Irwin が定義したいわゆる応力拡大係数との間に，良好な関係が存在することが実験的に確かめられている．その関係式は次のよ

うに示される.

$$\frac{dl}{dN}=\frac{(\Delta K)^m}{M} \tag{3.1.23}$$

ここに, M と m は材料定数, $\Delta K=K_{\max}-K_{\min}$ は応力拡大係数範囲, $K_{\min}$, $K_{\max}$ は最小荷重・最大荷重時における各応力拡大係数である. また m の値に関しては, Paris と Erdogan は4に近い値を得ている. その他の研究者の実験結果によれば, Si-Mn 鋼については $m=3$, 各種の高張力鋼によれば $m=2.5$ ~6.7 とばらついている.

実験結果の例を図 **3.1.12*** に示す. 対象鋼種は炭素鋼, アルミニウム合金, チタン合金である. 炭素鋼とチタン合金については ΔK の比較的大きい領域でだけ(3.1.23)の直線関係が成立し, それよりわずか低い領域ではもはやき裂の伝播が生じない ΔK のしきい値が見られる. 圧力容器用鋼である ASTM-A 533 B 鋼のしきい値は約 $\Delta K=88.2\,\mathrm{kg}\text{-}\sqrt{\mathrm{mm}}/\mathrm{mm}^2$ である.

* R. C. Bates and W. G. Clark : "Fractography and fracture mechanics," Westinghouse Research Lab. Sci. Paper No. 68-1D-7-RDAFC-P 1, 1968.

このような研究結果を実際の圧力容器の設計に適用するときには, 対象となる切欠き形状寸法の K_I 値を知る必要がある. それが常に求まるというわけにはゆかないが, 現在急増しつつある破壊力学の文献でまにあわせることを努力する必要があろう.

先に一言触れたように, 切欠き試験片についてかなりの繰返数の疲れ試験を実施しても, ある条件下ではき裂は発生はするがそれ以上進展しないという状

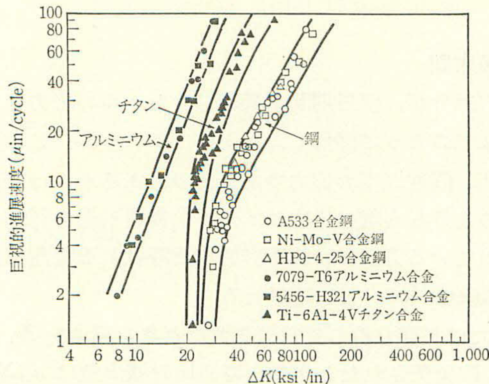


図 **3.1.12** 各種材料のき裂進展速度と応力拡大係数範囲の関係

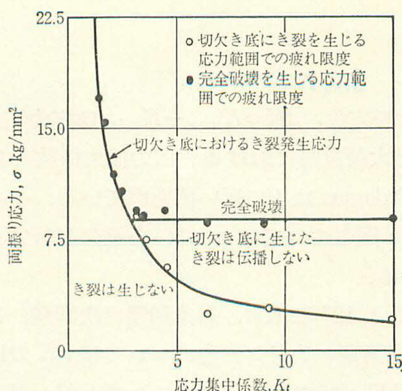


図 3.1.13　停留き裂の生じる条件

態が実現される．これを停留き裂と呼ぶ．

図 3.1.13 に Frost* の行った停留き裂に関する実験結果を示す．彼の実験によると，き裂を伝播させるに必要な最小応力は材料定数であって，切欠き底における応力集中係数には依存しない．このことは，切欠き底はき裂発生には大きな影響を及ぼすが，いったん伝播を開始したき裂に関しては，応力的にはほとんど影響を及ぼさない，ということから当然予測されることである．

* N. E. Frost : "Notch effects and the critical alternating stress required to propagate a crack in an aluminium alloy subject to fatigue loading," J. Mechanic Engineers Science, 1960.

3.1.10　累積被害則

圧力容器のある部分が，使用期間中異なったレベルの応力サイクルを受ける場合，疲れ寿命はどのように評価したらよいであろうか．これらの応力サイクルのあるものは疲れ限度以下の応力であったり，あるものは疲れ限度以上であったりする．このような各種の応力サイクルの累積効果を評価する最も簡便でかつ広く採用されている方法は，線形被害則と呼ばれる仮説である．これはまたマイナー則(Miner's Law)とも呼ばれる．

応力レベル σ_1 だけが繰り返して負荷されたときの寿命を N_1 とする．同じ応力レベル σ_1 が n_1 回負荷されたときの全寿命比の減少量は n_1/N_1 である．疲れ破壊は，累積線形被害度(すなわちサイクル比 n_i/N_i の和)が，

$$\frac{n_1}{N_1}+\frac{n_2}{N_2}+\frac{n_3}{N_3}+\cdots=1.0 \tag{3.1.24}$$

のとき生ずる.

Miner 則は累積被害の評価が簡便であるという理由から広く使われているが，すべての実験結果を統一的に説明できるわけではない．たとえば，負荷応力の繰返しの順序を説明できない．寿命の初期に与えられた高い応力は材料に多くの被害を与え，その後低い応力が負荷されても，期待値より早く疲れ破壊が生じる．また逆に繰返し応力が徐々に増加する場合は，期待値より遅く破壊が見られる．これらの現象は，もし寿命の初期に高い応力が負荷されるならば，疲れ破壊時の累積線形被害度は1より小さくなるであろうし，寿命の後半に負荷される場合には1より大きくなる，ということを示している.

たとえば，圧力容器の累積被害度を評価する場合，次のようなケースには注意を要する．すなわち，内圧による機械的応力と温度こう配に基づく熱応力とが同時に重畳されて負荷される場合，累積被害度は

$$\frac{n_M}{N_M}+\frac{n_T}{N_T}$$

とはならない．**図 3.1.14** に示されているように，被害度は

$$\frac{n_T}{N_{TM}}+\frac{n_M-n_T}{N_M}$$

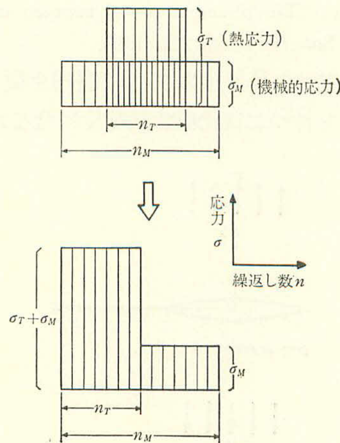


図 3.1.14 重畳した応力の評価方法

として評価されなければならない．ここに，N_M は応力 σ_M に対する破壊寿命，N_T は応力 σ_T に対する破壊寿命，N_{TM} は応力 $\sigma_T+\sigma_M$ に対する破壊寿命，n_M は応力 σ_M の負荷回数，n_T は応力 σ_T の負荷回数である．

3.2 ぜい性破壊

ぜい性破壊は多く存在する破壊様式の中で，塑性変形をほとんど伴わないで発生することを特徴としている．ガラスや石英のようなもろい非晶質で見られる破壊として知られているが，金属の場合には一口にぜい性破壊といっても，いろいろな様相が含まれている．そのような破壊現象を取り扱う破壊理論もいくつか存在するようである．しかしながら，そのうちで Griffith に端を発し，Orowan, Irwin らによって完成されたとされる線形破壊力学理論が，現在最も適用範囲が広く，多くの工学分野で採用されている．ここでは，その理論の基礎について述べ，次いでぜい性破壊試験の方法について述べることにする．

3.2.1 Griffith の理論

Griffith はいわゆる材料の理論的破壊強さと実験による破壊強さとが異なるのは，材料に先在する欠陥(き裂)によると考えた*.

* A. A. Griffith : "The phenomenon of rupture and flow in solids," Phil. Trans. Roy. Soc., London, 221, 1920.

いま，簡単のために，主軸の長さが $2c$ である長円き裂を考える(**図 3.2.1**)．このき裂は無限に広がりを持つ二次元板状試験片に含まれているとする．無限

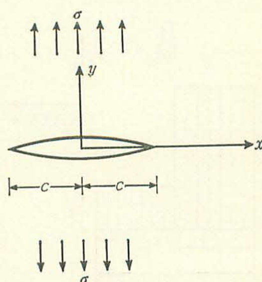


図 3.2.1　無限遠方で一様応力(σ)が働く長円き裂

遠方でき裂に垂直に負荷された一様応力σによって，このき裂はδcだけ進展したとする．そのとき，き裂を有する試験片の弾性ひずみエネルギーは，き裂を持たないこれと同じ試験片(σは一様に負荷されている)の弾性ひずみエネルギーよりも単位厚さ当り

$$W_E = \frac{\pi c^2 \sigma^2}{E} \tag{3.2.1}$$

だけ大きい．これは平面応力状態でのエネルギーであるが，平面ひずみ状態のときには，

$$W_E = \frac{(1-\nu^2)\pi c^2 \sigma^2}{E} \tag{3.2.2}$$

となる．ここに，E, νはそれぞれヤング率，ポアソン比である．

また，き裂の破面を新たに作るに必要な単位厚さ当りのエネルギーは

$$W_S = 4\rho c \tag{3.2.3}$$

である．ここに，ρは単位長さ，単位厚さ当りの表面エネルギーである．係数が4になっているのは，上下の破面について考えているからである．このき裂の長さがわずかに増した場合，弾性ひずみエネルギーと表面エネルギーとの増加量は，外力によるポテンシャルの減少によって補われる．このときの破壊条件は，“外力によるポテンシャルエネルギーの減少の割合が試験片内の弾性ひずみエネルギーの増加の割合より大きければ不安定破壊が生じる”ということになる．したがって不安定破壊の条件は

$$\frac{\partial W_E}{\partial c} \geq \frac{\partial W_S}{\partial c} \tag{3.2.4}$$

であり，これより平面応力状態のときには

$$\sigma \geq \sqrt{\frac{2\rho E}{\pi c}} \tag{3.2.5}$$

が得られる．平面ひずみの場合には，

$$\sigma \geq \sqrt{\frac{2\rho E}{(1-\nu^2)\pi c}} \tag{3.2.6}$$

となる．(3.2.5)または(3.2.6)において，破壊が発生するときの破壊応力は，等号が成立するときの値で与えられることになる．Griffith はもろいガラス材料を用いて種々の実験を行ない，その理論の妥当性を確かめた．

一方，Griffith 理論は鉄鋼などのぜい性破壊にはそのまま適用することはできない．その理由は，巨視的に見てぜい性破壊であっても破壊表面の薄い層内

にわずかの塑性変形層が見られるため，ぜい性破面の表面エネルギーのほかに，塑性表面エネルギーを考慮しなくてはならないことにある．これらのことを考慮して Orowan は，単位厚さ・単位長さ当りの塑性表面エネルギーを λ とすれば，破壊応力 σ_f は(3.2.5)から

$$\sigma_f=\sqrt{\frac{2(\rho+\lambda)E}{\pi c}} \tag{3.2.7}$$

で与えられるとした．低炭素鋼に関する Orowan の X 線実験の結果によれば，塑性変形層の有効深さは数分の 1 mm 程度である．仮に 0.5 mm の有効厚さと塑性ひずみを 1 % とし，かつ降伏応力を 20 kg/mm² とすれば，塑性表面仕事 λ は次のように評価できる．

$$\lambda=0.05\times2\times10^{-2}\times20\times10^{3}\times980\ \mathrm{erg/cm^2}=1.96\times10^{4}\ \mathrm{erg/cm^2}$$

この値は同じ材料の ρ の約 10^3 倍であるため，(3.2.7)において ρ は無視することができる．したがって塑性変形を含む鉄鋼材料のぜい性破壊強さは近似的に次式で表すことができる．

$$\sigma_f=\sqrt{\frac{2\lambda E}{\pi c}} \tag{3.2.8}$$

3.2.2 線形破壊力学

き裂先端からぜい性破壊が進展する状況は，き裂先端近傍の応力状態と密接に関係している．そのため破壊力学においては切欠き周囲の応力解析が重要な役割を果たし，これまでに多くの研究がなされてきた．この場合，応力解析は主として切欠き先端の応力拡大係数 K 値を求めることに主眼が置かれている．ここでは K 値を求めるための数学的手法と応用例とについて述べた後，破壊力学における K 値の物理的意味について記述する．三次元応力解析は数学的に困難なので，ここでは二次元問題に話しを限ることにする．

無限平板中に含まれる切欠きの変形モードは**図 3.2.2** に示されるように三つある．

Mode I においては，切欠きの上面と下面とは，互いに垂直に離れたり接触したりするように変形する．これはいわゆる opening mode と呼ばれる．Mode II はいわゆる edge sliding mode と呼ばれ，切欠きの上面と下面とは x–z 面内で逆向きに滑ろうとする．Mode III は，tearing mode と呼ばれ，切欠きの上面と下面とは x–z 面内で切欠きに垂直かつ逆向きに変形しようとす

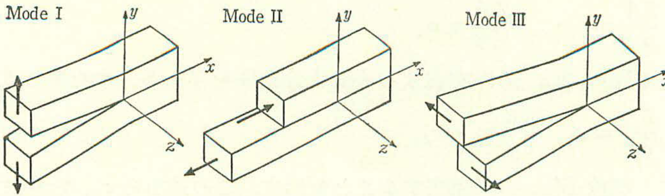


図 3.2.2 無限平板中に含まれる切欠きの変形モード

る.

これらのモードに対する応力場を決定するための方法の代表的なものとしては, Westergaard method* と Muskhelishvili method** とがある. ここでは前者の手法について紹介しよう. またこの Westergaard の手法は Irwin によって破壊力学の種々の問題に適用されて, 破壊力学の確立に非常に役だったのである.

* H. M. Westergaard : "Bearing pressures and cracks," Transactions of ASME. Journal of Applied Mechanics, 1939.

** N. I. Muskhelishvili : Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff International Publishing, 1975.

図 3.2.3 に座標系と応力成分の配置が示されている. それに関連して, 応力の平衡条件式と適合条件式とはそれぞれ次のように表される.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0 \tag{3.2.9}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0 \tag{3.2.10}$$

となる. 平衡条件の第1式は

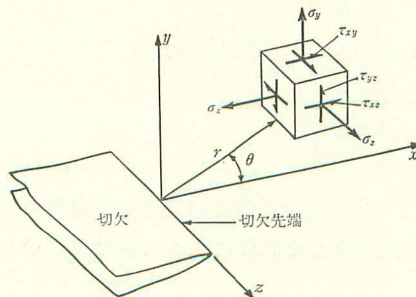


図 3.2.3 座標系と応力成分

$$\frac{\partial A}{\partial x}=-\tau_{xy},\ \ \frac{\partial A}{\partial y}=\sigma_x$$

を満足する関数 $A(x,y)$ が存在する必要十分条件を与える．また第2式は

$$\frac{\partial B}{\partial x}=\sigma_y,\ \ \frac{\partial B}{\partial y}=-\tau_{xy}$$

を満足する関数 $B(x,y)$ が存在することを示す．この式から τ_{xy} を消去すれば，

$$\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial B}{\partial y}$$

したがって，次式を満足する関数 Φ が存在する．

$$A=\frac{\partial \Phi}{\partial y},\ \ B=\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{3.2.11}$$

ここに Φ は Airy の応力関数と呼ばれているものである．この Φ を使えば各応力成分は次のように表される．

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2},\ \ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},\ \ \sigma_y=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \tag{3.2.12}$$

これらの式を適合条件式の中に代入すれば，

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}=0 \tag{3.2.13}$$

が得られ，結局応力関数 Φ は重調和関数(biharmonic function)であることがわかる．Westergaard の考察によれば，Mode I の切欠きに対しては，応力関数は次の複素関数で表され得る．

$$\Phi=\mathrm{Re}\{\bar{\bar{Z}}(z)\}+y\,\mathrm{Im}\{\bar{Z}(z)\} \tag{3.2.14}$$

ここに，Re と Im とはそれぞれ複素数の実数部と虚数部とを表す．また，

$$\bar{Z}=\frac{d}{dz}\bar{\bar{Z}},\ \ Z=\frac{d}{dz}\bar{Z},\ \ Z'=\frac{d}{dz}Z \tag{3.2.15}$$

が成立する．(3.2.14)を(3.2.12)に代入すれば，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\mathrm{Re}\,Z-y\,\mathrm{Im}\,Z'\\ \sigma_y&=\mathrm{Re}\,Z+y\,\mathrm{Im}\,Z'\\ \tau_{xy}&=-y\,\mathrm{Re}\,Z'\end{aligned}\right\} \tag{3.2.16}$$

当然のことながら(3.2.14)は適合条件式(3.2.13)を満足する．

また，x 方向，y 方向変位をそれぞれ u, v で表せば，それらは次式で計算される．

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1-\nu}{E}\mathrm{Re}\,\bar{Z} - y\,\mathrm{Im}\,Z \\ v &= \frac{2}{E}\mathrm{Im}\,\bar{Z} - y\,\mathrm{Re}\,Z \end{aligned}\right\} \tag{3.2.17}$$

これらの値は平面応力状態の場合に成立する．これらの関係式を導くとき，次の Cauchy-Riemann の関係は有用である．

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}\{Z'(z)\} &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Re}\,Z) = \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Im}\,Z) \\ \mathrm{Im}\{Z'(z)\} &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Im}\,Z) = -\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Re}\,Z) \end{aligned}\right\} \tag{3.2.18}$$

図 3.2.1 に示したような切欠きの場合には，関数 $Z(z)$ は次のように与えられる．

$$Z(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{1-(c/z)^2}} \tag{3.2.19}$$

いま**図 3.2.4** のように，極座標の原点を切欠き中心および左右の切欠き先端に採ると，

$$z = re^{i\theta},\quad z-c = r_1 e^{i\theta_1},\quad z+c = r_2 e^{i\theta_2}$$

となる．これらを(3.2.19)に代入すれば

$$Z = \frac{\sigma r}{\sqrt{r_1 r_2}} e^{i\left\{\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right\}} \tag{3.2.20}$$

また(3.2.19)を 1 回微分すれば，

$$Z' = \frac{-\sigma c^2}{(z^2-c^2)^{3/2}} = \frac{-\sigma c^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} e^{-i\frac{3}{2}(\theta_1+\theta_2)} \tag{3.2.21}$$

1 回積分したものについては，

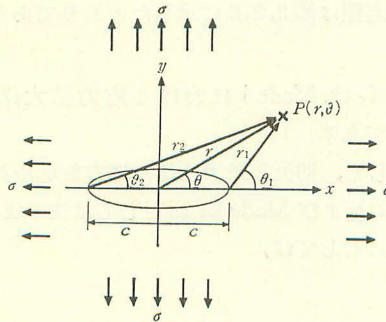


図 3.2.4 点 P の座標表示と無限遠方における応力負荷状態

$$\bar{Z} = \sigma\sqrt{z^2-c^2} = \sigma\sqrt{r_1 r_2}\,e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} \tag{3.2.22}$$

ここで，$|x|<c$ で　$y=0$　の領域(切欠きの領域)では，$\mathrm{Re}\,Z$，$y\,\mathrm{Re}\,Z'$　および $y\,\mathrm{Im}\,Z'$ は 0 になるから，切欠き面に沿った自由境界で $\sigma_y=0, \tau_{xy}=0$ なる境界条件が満足されることは(3.2.16)から明らかである．また無限遠方においては($|z|\to\infty$)，$y\,\mathrm{Re}\,Z'$ と $y\,\mathrm{Im}\,Z'$ が 0 になり〔(3.2.21)から自明〕，かつ $\mathrm{Re}\,Z=\sigma$ となるから

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma,\quad \tau_{xy} = 0$$

右側の切欠き先端近傍では，$r=c$, $r_2=2c$ で $\theta=0$, $\theta_2=0$ となるから，(3.2.20)は

$$Z = \frac{\sigma\sqrt{c}}{\sqrt{2r_1}}\,\theta^{-i\frac{\theta_1}{2}} \tag{3.2.23}$$

となり，座標原点を切欠き先端に採り

$$\zeta = r_1 e^{i\theta_1}$$

と置けば，

$$Z(\zeta) = \frac{\sigma\sqrt{\pi c}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \tag{3.2.24}$$

となる．この関数を(3.2.16)式に代入すれば，

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]\\
\sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]\\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3}{2}\theta
\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

が得られる．ただし，座標は図 **3.2.3** に示したとおりである．また，K_I は

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi c} \tag{3.2.26}$$

で与えられる．この K_I は Mode I における応力拡大係数(stress intensity factor)と呼ばれるものである．

以上は Mode I に対して，切欠き先端近傍の応力を求めるための手続きを詳細に述べたが，Mode II および Mode III に対しては次のような $\Phi(z)$, $Z(z)$ を用いればよい．Mode II に対しては，

$$\Phi = -y\,\mathrm{Re}\,\bar{Z} \tag{3.2.27}$$

$$Z(z) = \frac{\tau}{\sqrt{1-(c/z)^2}} \tag{3.2.28}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= 2\,\mathrm{Im}\,Z + y\,\mathrm{Re}\,Z'\\ \sigma_y &= -y\,\mathrm{Re}\,Z'\\ \tau_{xy} &= \mathrm{Re}\,Z - y\,\mathrm{Im}\,Z'\end{aligned}\right\}\tag{3.2.29}$$

Mode III に対しては

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yz} &= \mathrm{Re}\,Z\\ \tau_{zx} &= \mathrm{Im}\,Z\\ w &= \frac{2(1+\nu)}{E}\mathrm{Im}\,\bar{Z}\end{aligned}\right\}\tag{3.2.30}$$

ここに，w は面外変位である．

応力拡大係数 K は，切欠き先端近傍の応力の分布を左右する物理量であるが，これはまた切欠きが進展するときのひずみエネルギー解放率 G と密接な関係があることが次のようにして示される．

いま，**図 3.2.5** に示されるような切欠き（またはき裂）の進展を考える．つまりき裂長さが $2c$ の状態〔図で(a)〕から δc だけ進展した状態〔図で(b)〕に移ったとする．このときき裂先端近傍で解放されるひずみエネルギーは，新たに形成され開口したき裂(δc)を閉じるのに要する仕事から求められる．その仕事を δU_T とすると，G 値は次式で求められる．

$$G = -\frac{\delta U_T}{\delta c} = \lim_{\delta c\to 0}\frac{2}{\delta c}\int_0^{\delta c}\left(\frac{\sigma_y}{2}v + \frac{\tau_{xy}}{2}u + \frac{\tau_{yz}}{2}w\right)dx \tag{3.2.31}$$

応力の値は(3.2.25)から与えられ，変位は(3.2.17)で求めることができる．また，Mode I, Mode II, Mode III を同時に考慮すれば，G 値は結局次式で与

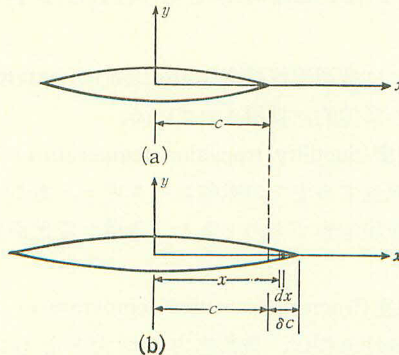


図 3.2.5 き裂進展状況

えられる.

$$G=\frac{K_I{}^2}{E}+\frac{K_{II}{}^2}{E}+\frac{1+\nu}{E}K_{III}{}^2 \qquad (3.2.32)$$

Mode I の変形状態だけを示すときには，平面応力状態で

$$K=\sqrt{EG} \qquad (3.2.33)$$

となり，K 値はひずみエネルギー解放率から求められることになる．線形破壊力学の基本的思想は K_c-概念にあるといわれており，破壊が発生するときの K 値(K_c)を Criterion とするのである．その根拠は先ほど述べた(3.2.4)式にある．

3.2.3　鋼材のぜい性破壊試験法

試験片に鋭い切欠きを加工し，低温で各種実験(静的引張りや曲げあるいは動的引張りや曲げ試験など)を実施すると，試験温度がある一定値よりも低くなると，破断までの吸収エネルギーは急激に減少する．破面の巨視的な外観も繊維状から結晶粒状へと変化するため，破壊状況が延性破壊かぜい性破壊かは一応破面から判別できる．

鋼構造物の設計上特に問題となるのは，延性破壊からぜい性破壊に移行するときの遷移温度である．この遷移温度は，鋼材の種類によって異なることはもちろんのこと，切欠きの鋭さ，試験片形状，荷重速度などによっても異なることが実験から明らかにされている．鋼材のこのような性質は切欠きぜい性(notch brittleness)と呼ばれ，ぜい化温度の高低によって鋼材のぜい性破壊に対する感度(これは切欠き感度 notch sensitivity とも呼ばれる)が判定されることになる．

切欠き感度を示すには普通遷移温度(transition temperature)が用いられており，次のようなものが具体的に採用されている．

(イ) **延性遷移温度**(ductility transition temperature)

き裂が切欠き底に発生するまでの吸収エネルギー，あるいは塑性変形量が温度に対して示す遷移現象を表すものである．急激な変化が見られる温度を延性遷移温度と呼ぶ．

(ロ) **破面遷移温度**(fracture transition temperature)

切欠き底に生じた延性き裂は，負荷応力の増大とともにゆっくり進展するが，この長さがある限界値(K_c で決定されると考えてよい)に達すると，先に

述べた Griffith-Orowan の不安定条件を満足し，伝播速度の速いぜい性破壊に移行する．限界き裂長さは温度に対して遷移現象を示し，そのときの温度を破面遷移温度という．したがってこの遷移温度は破壊の不安定伝播開始に関するものと考えてよい．

（ハ）**停止遷移温度**(arresting transition temperature)

いったん伝播しだしたぜい性き裂は，その後伝播を継続するためにある限界値以上の応力を必要とするし，一定の応力場の下でき裂が伝播を継続するためには一定の温度以下にあることが必要である．伝播継続中エネルギーの平衡状態が再び実現されると，き裂は停止する．そして，き裂伝播を停止させる限界応力は普通，温度に対して遷移温度を示し，これが停止遷移温度と呼ばれる．

以上の遷移温度を模式的に示すと図 3.2.6 のようになる．これらの遷移温度に対応する破面の外観は，繊維状から結晶状へ移行する途中であることを示す．

切欠きぜい性の試験方法として代表的なものを取り上げると次のようになる．

(1) **衝撃曲げ試験**

代表的な試験法としてはVノッチシャルピー試験がある．これは簡単に試験ができるため，鋼材の承認試験法として現在最も広く採用されているものである．試験法としては，各種温度下で所定の衝撃エネルギーを与え，試験片を曲げにより破断させて，ぜい性破面率の変化，吸収エネルギー，塑性変形量(たとえばハンマーによる試験片の横膨出量などがある)の変化などを測定して，材料の切欠き靱性(fracture toughness)を求める．

またプレスノッチシャルピー試験は，ぜい性破壊の伝播および伝播停止に関

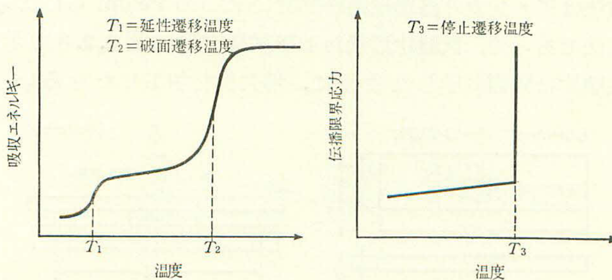


図 3.2.6 各種遷移温度の模式図

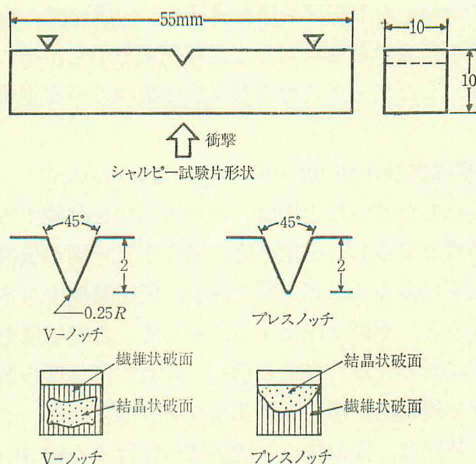


図 3.2.7　V−ノッチとプレスノッチシャルピー試験片形状とその破面

する特性を調べるのに適しているといわれている．試験片は図 3.2.7 に示されているように，ナイフエッジの圧入によって鋭い切欠きが付加される．

Vノッチシャルピー試験片の場合には，切欠き底部から，まず繊維状の破面が生じ，それがある深さまで進展した後，結晶状の破面に移り変わる．しかしプレスノッチシャルピー試験では図 3.2.7 に示すように，破面状況は全く逆であり，切欠き底から結晶状の破面が生じ，それがある深さまで伝播し，それ以後の破壊は延性となる．このような破面状況から，Vノッチシャルピー試験はぜい性破壊発生特性を，プレスノッチシャルピー試験はぜい性破壊伝播停止特性をよく表わすとされている．

(2) NRL 落重試験

この試験法はアメリカの海軍技術研究所(NRL)の Pellini らによって開発された試験方法であって，試験片形状および試験方法は図 3.2.8 に示すとおりである．試験片は同図に示したように，切欠きを加工したもろい溶接ビード

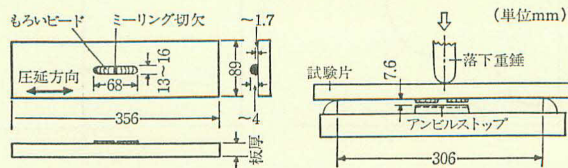


図 3.2.8　NRL 落重試験

(crack starter bead と呼ばれる)を表面に有しており，所定の高さから所定のおもりを落下させることによって，ぜい性ビードからぜい性き裂を発生させる．発生したぜい性き裂の進展状況によって，材料の NDT 温度(nil ductility transition temperature)を求める．すなわち試験温度が NDT 温度以上であれば，ぜい性き裂が板厚を貫通することはない．この試験方法は後に示すように，多くの破壊事故例との関連が詳細に調査されており，アメリカにおいては特に重要視されている．

(3) WOL 試験

この試験法はアメリカの Westinghouse 社の E. T. Wessel らによって開発されたものであって，平面ひずみ状態下での K_{Ic} を求めるのに適している．試験片形状を図 **3.2.9** に示す．切欠きは機械切欠きを加工した後，繰返し荷重を負荷してやることによって疲れき裂を導入する．試験片は比較的小形であるにもかかわらず，き裂先端の拘束が大きいために K_{Ic}(平面ひずみ状態下での K_c 値)を求めることができる．最近では別に，**CT 試験片** (compact tension specimen)とも呼ばれる．

いま，試験片の公称破断応力 σ_{nf} は，破断荷重を P とすれば次式で与えられる．

$$\sigma_{nf}=\frac{P}{th}+6\frac{Pw}{th^2} \tag{3.2.34}$$

ここに t は試験片厚さ，w は荷重点から中実部の中立軸までの距離，h は中実部の深さである．(3.2.34)の第1項は引張応力成分を，第2項は曲げ応力成分をそれぞれ表している．また公称破壊靭性値 K_{Ic} は次式で与えられる．

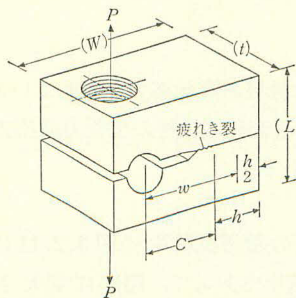


図 3.2.9 WOL 試験片形状

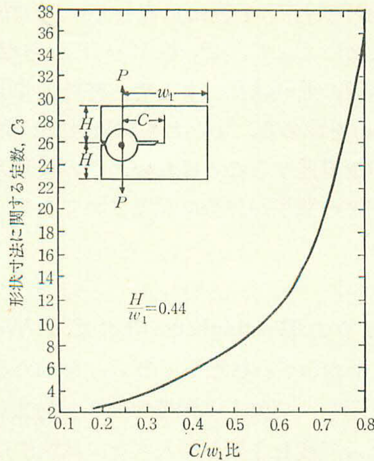


図 3.2.10 X 形 WOL 試験片の C/w_1 比と形状寸法に関する定数 C_3 との関係

$$K_{Ic}=\frac{C_3P}{\sqrt{C}t} \qquad (3.2.35)$$

ここで C_3 の値を求める必要があるが，それは**図 3.2.10** から求めることができる．

一方，き裂先端には破壊までに塑性域が形成されるため，K_{Ic} を計算するときに塑性域の補正を行う必要がある．つまり塑性域の先端まで仮想き裂が伸びているとするのである．その大きさは次の量で与えられる．

$$\gamma_Y=\frac{{K_I}^2}{6\pi{\sigma_Y}^2} \qquad (3.2.36)$$

この量を使えば，実際の破壊靭性値は次式で与えられる．

$$K_{Ic}=\frac{C_3P}{\sqrt{C+\gamma_Y}t} \qquad (3.2.37)$$

ここに，(3.2.36) で σ_Y は材料の降伏応力を表している．また塑性域の大きさ γ_Y (plastic zone size) は，き裂先端近傍の引張方向応力値が降伏応力値に等しいということから求められる．

(4) ESSO 試験

大形試験の一種で，その標準試験片は**図 3.2.11** に示されている．幅 400 mm，長さ 500 mm の試験片であって，端部に切欠きを加工しておき，そこをハンマで衝撃的にたたくことによってぜい性き裂を発生させる．もちろんそ

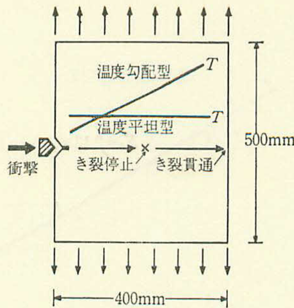


図 3.2.11 ESSO 試験片

のときには，一様応力 σ を負荷した後，衝撃力を加えるということになるし，き裂の予想伝播経路の部分は一様なある温度に冷却しておく．切欠きからぜい性き裂が発生してしまうかあるいは全然発生しないかは，温度と負荷応力の組合せで決まってしまう．その組合せをいろいろ変えて実験を行い，ぜい性破壊したものとぜい性き裂が生じなかったものとの境をぬって曲線を引けば，ぜい性破壊の発生に関する材料特性が求められる．その結果の例を図 3.2.12 に示す．

以上の試験は試験片内の温度が一様の場合であったが，温度こう配を付けた ESSO 試験片についてはぜい性き裂停止特性が得られる．温度こう配は切欠き部が低温側で，き裂が進展するに従って高温側になるようにしておく．ハンマ(またはくさび)による衝撃によって発生したぜい性き裂は時間の経過とともに高速で高温領域へ突入してゆく．高温側では材料の破壊靱性は増大するので，き裂進展に対する抵抗も大きくなり，エネルギーバランスがとれたところでぜい性き裂は停止する．いま停止き裂長さを c とし，停止点の温度を T とすれ

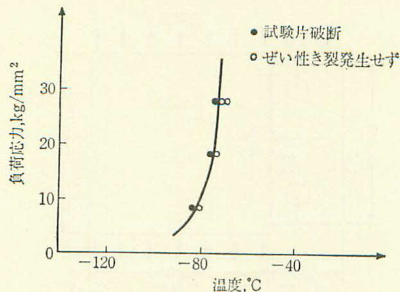


図 3.2.12 ESSO 試験結果の例

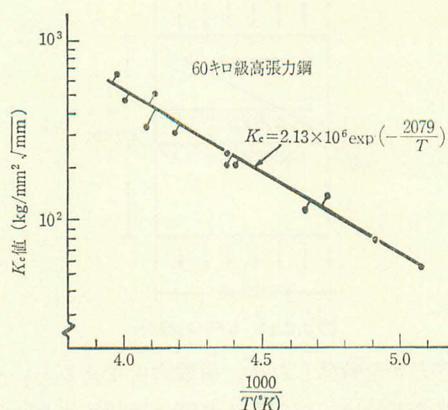


図 3.2.13 二重引張試験における K_c 値と温度 T(°K)の関係

ば，いわゆる K_c 値は次式で求められる．

$$K_c=\sigma\sqrt{2B\tan\frac{\pi c}{2B}} \tag{3.2.38}$$

ここに，B は試験片幅，σ はグロス応力，c は停止クラック長さである．

停止温度と K_c 値との関係は図 3.2.13 のようになり，いわゆる K_c 値は Arrhenius 形の温度依存性を示すことがわかる．

$$K_c=2.13\times10^6\exp\left(-\frac{2079}{T}\right) \tag{3.2.39}$$

(5) 二重引張試験

この試験はぜい性破壊伝播および伝播停止特性を求める試験片として日本で考案されたもので，図 3.2.14 にその形状・寸法が示されている．試験片のき

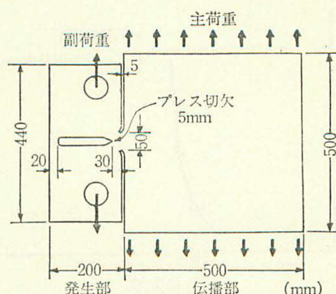


図 3.2.14 二重引張試験片形状

裂伝播部に所定の温度こう配を与え，ぜい性き裂発生部は十分低い一定温度に冷却する．伝播部に所定の引張応力を負荷した後，発生部に取り付けた副荷重装置を働かせて，切欠き底からぜい性き裂を発生させ伝播部へ突入させる．高温側へ突入したぜい性き裂は，ESSO 試験の項で述べたことと同じ理由で適当な位置で停止する．K_c 値の計算方法はもちろん ESSO 試験の場合と同様である．ESSO 試験の場合には，得られた試験結果は衝撃力の影響を受けている可能性があるが，この二重引張試験の場合には，その心配は無用であるという特長がある．しかしながら，実験結果によると，両者の間には顕著な差違は見られず，ばらつきの範囲内で一致しているといえそうである．

3.3 疲れとクリープの相互作用

既に述べたように，荷重の繰返しによって材料は疲れ損傷を受ける．また第5章で述べるように，ある荷重が長時間連続して負荷される材料は，クリープ損傷を受ける．このクリープ損傷は使用温度が高ければ高いほど顕著になる．したがって，クリープ損傷が顕著となる温度領域(以下クリープ温度域という)で荷重の繰返しが緩慢な場合には，疲れとクリープの相互作用(fatigue-creep interaction)を考慮しなければならない．実際，高温構造物の高温設計においては，第4章で詳しく述べるように疲れとクリープとの相乗効果が取り入れられている．ここではその基本的考え方といくつかの実験結果とについて記述する．疲れとクリープの相乗効果に関する研究の歴史はたいへん短く，最近始まったばかりであり，したがって定説といえる理論はまだないのが現状であることを断っておく．

3.3.1 線形損傷則(linear damage rule)

疲れとクリープとの相互作用によって生じる損傷の微視的機構は各研究者によって種々の考え方が提案されている．高温で長時間連続して荷重を保持しているときに生じるひずみ時硬や，結晶粒界に発生する空どうなどによって疲れ損傷が促進されるといった考え方などがその例である．しかしながら，高温構造物の安全設計という観点からは，クリープと疲れの相互作用の微視的機構の解明とは別に，疲れ損傷とクリープ損傷とをどのように結びつけ，高温における疲れ寿命に及ぼすひずみ速度効果を，どのように定量的に表現するかが重要

な問題であろう.

疲れ損傷の線形被害則については，先に述べたように Miner 則がある．クリープ損傷については，時間比でもって損傷量を表せるとする Robinson* の被害則がある.

* E. L. Robinson : Transactions of ASME, 74, 1952.

Robinson の線形被害則は次式のように表される.

$$\Sigma\left(\frac{t}{T_d}\right)_j = 1 \qquad (3.3.1)$$

ここに，$(T_d)_j$ は j で番号づけられる一定応力 σ_j が連続して負荷されるとき，クリープ破断が生じるまでの時間，t_j は j で番号づけられる一定応力 σ_j が負荷される時間である．すなわち，時間比 t_j/T_j は一定応力 σ_j が作用することによって，寿命比がそれだけ減少することを表している.

疲れ損傷とクリープ損傷とが同時に生じるときには，両者の間に次のような加算則(Additive Law)が成立することを何人かの研究者は指摘している*.

* たとえば，S. Taira : Creep in Structure, Academic Press, 1962.

$$\phi_f + \phi_c = 1 \qquad (3.3.2)$$

ここに，ϕ_f は疲れ損傷，ϕ_c はクリープ損傷である．いま，ϕ_f は Miner 則で表されるとする．応力 σ が連続して作用するときの破断時間を T_d とし，σ の作用時間が dt のときのクリープ損傷は，線形則が成立するとすれば，dt/T_d で表される．したがって 1 サイクル中のクリープ損傷は $\oint(dt/T_d)$ だから，破断するまで$(N=N_f)$には，

$$\phi_c = N_f \oint \frac{dt}{T_d} \qquad (3.3.3)$$

だけのクリープ損傷を受ける.

したがって(3.3.2)はまた次のように具体的に書ける.

$$\frac{N_f}{N_F} + N_f \oint \frac{dt}{T_d} = 1.0 \qquad (3.3.4)$$

ここに，N_F は σ が繰り返し負荷されたときの疲れ寿命(クリープの効果は含まれていない)である.

実験結果の例を**図 3.3.1** に示す．これは Lagneborg* らによって与えられた実験結果である．仮に(3.3.4)が妥当であるとすれば，同図に示された 45° 傾斜の直線上に実験結果は乗るはずである．しかしながら，図に示された実験結

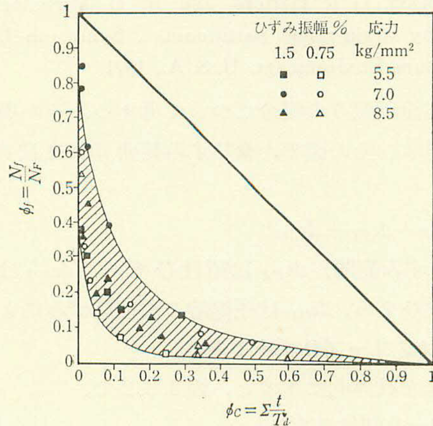


図 3.3.1 疲れ損傷とクリープ損傷の関係

20Cr-35Ni ステンレス鋼, 700°C

果は直線よりもかなり下側にきており，(3.3.4)で評価することが危険であることを示している．

* R. Lagneborg and R. Attermo : "The effect of combined low-cycle fatigue and creep on the Austenitic stainless steel", Metallurgical Transactions, 2, 1971.

図で示されるような実験結果を整理するには，Esztergar* が提案した次の式が有効であると思われる．

* E. P. Esztergar : "Interim design basis for creep and fatigue conditions", G. G. A. Report, GAP, 1230, 1.

$$\sum_j\left(\frac{N_f}{N_F}\right)_j^u+\sum_k\left(\frac{t}{T_d}\right)_k^v\leq R \tag{3.3.5}$$

ここに，u, v, R は一応材料定数である．この式は非線形であるため簡便に使うには繁雑であるので，設計にそのままの形で採用することは困難であろう．

3.3.2 ひずみ分割法(strain partitioning approach)

疲れ－クリープ損傷の評価法については，Manson, Coffin, Wood および Edmunds といった研究者による提案式が見られるが，ここではその例として，Manson によるひずみ分割法について紹介することにする*. Manson らのひずみ分割法は，繰返し非弾性ひずみを 4 種類のひずみ成分に分離して，それぞれのひずみと寿命との関係を求めるものである．

* S. S. Manson, G. R. Halford and M. H. Hirschberg: "Creep-fatigue analysis by strain-range partitioning", Symp. on Design for Elevated Temperature Environment, U. S. A., 1971.

いまひずみ制御完全両振りの場合について考える．その場合のヒステリシス曲線を**図 3.3.2** に示す．その図で，全ひずみ範囲 $\Delta\varepsilon_R$ は次のように分割される．

$$\Delta\varepsilon_R = \Delta\varepsilon_{PP} + \Delta\varepsilon_{PC} + \Delta\varepsilon_{CC} \tag{3.3.6}$$

ここに，$\Delta\varepsilon_R$ は全ひずみ範囲，$\Delta\varepsilon_{PP}$ は塑性ひずみ，$\Delta\varepsilon_{PC}$ は圧縮時のクリープによる引張時の塑性ひずみ，$\Delta\varepsilon_{CP}$ は圧縮時の塑性ひずみによる引張り時のクリープひずみ，$\Delta\varepsilon_{CC}$ はクリープひずみである．

各種ひずみの意味を具体的に示すと，図 3.3.2 で，

(1)　$\Delta\varepsilon_R$＝AD＝非弾性ひずみ

(2)　$\Delta\varepsilon_{PP}$＝DB＝引張りと圧縮時の塑性ひずみの小さいほうの値

(3)　$\Delta\varepsilon_{CC}$＝CD＝引張りと圧縮時のクリープひずみの小さいほうの値

(4)　$\Delta\varepsilon_{PC}$＝AC－DB＝引張りと圧縮時の塑性ひずみの差

(5)　$\Delta\varepsilon_{CP}$＝BA－CD＝引張りと圧縮時のクリープひずみの差

となる．

いま，$\Delta\varepsilon_{PC}=0$ の場合には，AC＝DB となり，クリープひずみ成分は 0 となるから，純粋の低サイクル疲れ試験に等しくなる．したがって，Manson-Coffin の関係式が $\Delta\varepsilon_{PP}$ に関して成立する．

$$N \cdot \Delta\varepsilon_{PP}{}^k = C \tag{3.3.7}$$

もちろんこの式は高温においても繰返し速度が速く，クリープひずみが無視できる場合には成立するものと思われる．

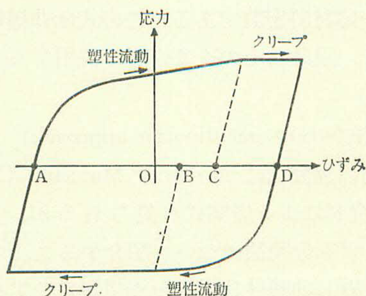


図 3.3.2　ひずみ制御完全両振り試験におけるヒステリシスカーブ

また，各ひずみ成分と寿命との間にも Manson-Coffin の関係式が成立することが図 **3.3.3** および図 **3.3.4** から明らかである．図 3.3.4 の全ひずみの中には $\Delta\varepsilon_{PC}$ だけでなく，わずかながら $\Delta\varepsilon_{PP}$ 成分が含まれているが，線形被害則が

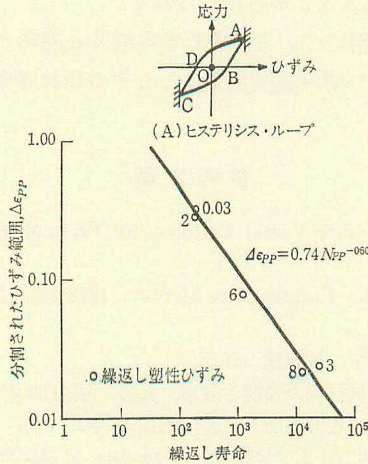


図 3.3.3 ひずみと寿命の関係($\Delta\varepsilon_{PP}-N_{PP}$)

$\left(2\frac{1}{4}\text{Cr-1 Mo, 1100°F}\right)$

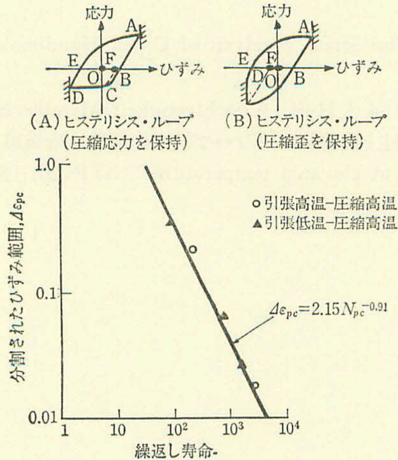


図 3.3.4 ひずみと寿命の関係($\Delta\varepsilon_{PC}-N_{PC}$)

$\left(2\frac{1}{4}\text{Cr-1 Mo, 1100°F}\right)$

成立するとすれば，次式から N_{PC} を求めることができる.

$$\frac{N}{N_{PP}}+\frac{N}{N_{PC}}=1 \tag{3.3.8}$$

つまり，N_{PP} の値は図 3.3.3 から求められる.

このように，高温材料について，各ひずみ成分と寿命との間の関係式を得ておけば，任意の非弾性ひずみ履歴を受けたときの疲れ寿命を算出することが可能となる.

参考文献

(1) R. W. Nichols : Pressure Vessel Engineering Technology, Elsevier Publishing Co. Ltd., 1971.

(2) R. Cazaud et al. : La Fatigue Des Métaux, 1973 (舟久保，西島邦訳：金属の疲れ，丸善).

(3) 横堀武夫：材料強度学，技報堂，1955.

(4) 日本金属学会編：金属材料の強度と破壊，丸善，昭和 39 年.

(5) 横堀武夫監訳：金属の疲労破壊，丸善，昭和 45 年.

(6) A. S. Tetelman and A. J. McEvily : Fracture of Structural Materials, John Wiley & Sons, Inc., 1967.

(7) 鵜戸口英善：弾性学，共立出版，昭和 39 年.

(8) ASTM : "Plane strain crack toughness testing of high strength metallic materials", STP 410.

(9) H. Tada et al. : The Stress Analysis of Crack Handbook, Del Research Corporation, 1973.

(10) F. K. G. Odqvist and J. Hult : Kriechfestigkeit Metallischer Werkstoffe, Springer-Verlag, 1962 (村上澄男訳：クリープ強さの理論，培風館，昭和 42 年).

(11) ASTM : "Fatigue at elevated temperatures", STP 520, 1972.

4. 原子炉構造設計

圧力容器の設計に関しては，各国にそれぞれ権威ある規格が存在する．原子炉圧力容器の設計に関しては，アメリカ機械学会(ASME：American Society of Mechanical Engineers)の ASME Code Section III[1] が現在最も広く使用されているように見える．わが国の規格も，基本的にはその規格に準じているといってもけっしていいすぎではないであろう．

したがって本章では，ASME Code Section III と，高温構造物を対象にした Case Interpretation 1592[2] とについて記述する．Case Interpretation は 1331 以来数回にわたって改訂されてきており，1592 においてかなり体系だった構成になっており，今後は大幅な改訂はないと思われる．ここでは基本的な考え方と設計手法について述べる．最後に耐震設計の基本的な考え方について日本電気協会編“原子力発電所耐震設計技術指針”に準じて述べることにした．

4.1 構造設計法の変遷

圧力容器の設計に関しては，ASME が発行している“Boiler and Pressure Vessel Code, Section VIII Pressure Vessel”が従来広く採用されてきたし，わが国の基準もこれを基礎として作成された．アメリカにおける初期の軽水炉の圧力容器も，この規格に基づいて製作されている．わが国においても JPDR などの圧力容器は ASME Code Section VIII に基づいて設計された．

しかしながら，従来の圧力容器と原子炉圧力容器とは，設計の基本思想のいくつかが異なると考えられるため，従来の規格をそのまま適用することは必ずしも適当ではない．そのような状況に立脚して，ASME は，1968 年に原子炉圧力容器用の設計基準である“ASME Code Section III Rule for Nuclear Vessel”を発行した．最近の原子炉圧力容器はすべてこの基準に基づいて設計

されているといっても過言ではない.

一方，配管系の設計については，1967年以降アメリカのUnited States of American Standards Instituteが発行している“USAB B 31 Code for Pressure Piping”が採用されてきたが，ASME Code Section IIIとの統一を図るため，その後B 31.7 Nuclear Power Pipingが発行されて現在使用されている．そしてこれらの原子炉圧力容器と配管との二つの設計コードは一つにまとめられて，1971年に“ASME Code Section III Nuclear Power Plant Components”となった．以上のような経緯からもうかがえるように，ASMEによる原子炉構造設計基準は，新しい研究成果もふまえて逐次改良されてきたし，現在でも更に改訂の努力が払われている.

4.2 ASME Code Section III の概要

4.2.1 Section III の特徴

ASMEが原子炉圧力容器の設計手法に関してSection VIIIからSection IIIへと転換したときの大きな相違点は

(1) 破壊基準として従来は最大主応力説(材料の破壊は最大主応力に支配されるとする説)を採用し，最大主応力を設計基本応力としたのに対し，Section IIIでは最大せん断応力説を破壊基準として採用する.

(2) Section IIIでは疲労設計を考慮する必要がある.

などの点である.

延性材料の破壊，あるいは塑性変形は，最大主応力説よりは最大せん断応力説のほうが実験結果と合うといわれているが，学説としてはひずみエネルギー説のほうが実験事実を最もよく説明する．しかしながらひずみエネルギー説では設計計算が複雑になり，疲れ解析を行ううえにおいてもたいへん不便になる．したがって最大せん断応力説が採用されたのは，実用性に重点が置かれたことのほかに，それは安全側の設計になることにもよるのであった.

使用材料の許容応力について述べると，従来の規格では引張強さの1/4，または降伏応力の5/8のいずれか小さいほうの値を採用していたのに対してSection IIIでは，引張強さの1/3，または降伏応力の2/3のいずれか小さいほうの値を採ることになっている．このことは許容応力を大きくしたことにな

り，原子炉圧力容器の肉厚を薄くすることに対応する．しかしながら，構造材料の品質向上，品質管理は最近目ざましく進歩しており，かつ材料特性のばらつきが小さいこと，また各部材の応力評価は詳細に実施され，その段階で構造要素の疲れ解析も十分詳細に行われること，などを考えると，従来の規格よりいっそう合理的になっているといえるのである．

Section III と Section VIII Division I との比較をすれば表 **4.2.1** のようになる[3]．Section III の特長のいくつかについて言及すると次のようになる．

使用温度限界はフェライト鋼では 371°C 以下，オーステナイト鋼では 427°C 以下となっており，それらの材料はこれらの温度領域ではクリープ変形が生じない．つまりクリープが生じる温度域での設計は，別の Code Case (ASME Code Interpretation 1771～1592) によるのであってここでは考慮しない．一方，Section VIII においては，クリープ速度およびクリープ破断強さを考慮することによって，クリープ設計を行ってもよいことになっている．

溶接施工についても Section III は安全性を確保するために厳しくなっている．たとえば Section VIII では検査の程度によっては継手効率(継手部の強さと母材の強さとの比)を 1 より小さくしているが，Section III では，すべての溶接部は各種検査(X 線検査・超音波探傷・磁粉探傷など)を全数実施する必要があることのほかに，継手効率は 1 でなければならないとしている．

4.2.2　設計評価の流れ

次に構造要素の応力評価法について記述する前に，その準備として用語の定義について述べる．応力評価の流れを示す Hopper 線図[4]は表 **4.2.2** に示されている．

いま，構造要素内の考えている点の主応力を $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (ただし，$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) とすると，最大せん断応力 $\tau_{\max}$ は

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \tag{4.2.1}$$

で与えられる．

単純引張試験における降伏応力は $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ として

$$\sigma_Y = \sigma_1 \tag{4.2.2}$$

で求められる．最大せん断降伏応力 τ_Y はこれから，

表4.2.1　ASME Code Section III と Section VIII との比較

項　　目	Sec. III	Sec. VIII (Div. 1)
適用範囲	(1) 原子力プラントの金属機器全部を含む. (2) 特に圧力の制限を考えない. (3) 設計仕様に安全性基準を明確にすることを強調.	(1) 圧力 210 kg/cm^2(3 000 psi)以下, 1 kg/cm^2 (1.5 psi)以上の圧力容器に適用するのが原則. (2) 圧力容器だけで配管を含まない.
内容の分類	機器の重要度と特殊性により, 次のように分類している. (1) 一般要求事項 (2) 1級機器 (3) 2級機器 (4) 3級機器 (5) MC 級機器(格納容器, 工学的安全防護設備機器) (6) 機器支持構造 (7) 炉心支持構造	材料, 施工方法によりつぎのように分類している. (1) 一般要求事項 (2) 施工方法による分類 a) 溶接施工容器, b) リベット施工容器, c) 鍛造容器, d) ろう付容器 (3) 材料による分類 a) 低合金鋼容器, b) 非鉄金属(銅, アルミニウム, ニッケル合金, チタン)容器, c) 高合金(ステンレス鋼)容器, d) 鋳鉄容器, e) クラッド施工, f) ダクタイル鋳鉄容器
材料に対する考え方	鋼材は ASTM で規格化された材料, 溶接材料は AWS によって規格化した溶接材料を使用. 使用温度限界はフェライト鋼では 700°F(371°C)以下, オーステナイト鋼では 800°F(427°C)以下, ボルト鋼では 800°F 以下で使用する. 許容応力の決め方 (1) 一般材料(ボルト材料を除く) a) 常温での最小引張強さの 1/3 b) 高温での引張強さの 1/3 c) 常温での最小降伏強さの 2/3 d) 高温での降伏強さの 2/3 以上のなかの最低値 (2) オーステナイト鋼, 高合金 (1)a)b)c)のほか, 降伏強さの 90% 以上のなかの最低値 (3) クリープ速度依存性およびクリープ破断強さの影響を受ける許容応力は規定しない.	それぞれの分類に応じて高い温度域まで使用できる. 許容応力の決め方 (1) 非クリープ域で使用する場合(ボルト材料を除く) a) 常温での最小引張強さの 1/4 b) 高温での引張強さの 1/4 c) 常温での降伏強さの5/8(非鉄金属では2/3) d) 高温での降伏強さの5/8(非鉄金属では2/3) 以上のなかの最低値 (2) 非鉄金属とオーステナイト材料では二つの許容応力を規定している. a) 変形を制限するとき非鉄金属では降伏強さの 2/3, オーステナイト鋼では 62.5% b) 変形を制限しないとき降伏強さの 90% (3) クリープ域で使用する場合(ボルト材料を除く) a) クリープ速さ 0.01%/10^{3}h の平均応力 b) 10^5 時間の平均クリープ破断強さの 67% c) 10^5 時間の最小クリープ破断強さの 80%
構造設計の考え方	(1) 最大せん断応力説によって変形および破壊を考える. (2) 応力の重要度に応じて許容応力強さを変えて設計する. (3) 各部で詳細な応力計算をする. (4) 疲れ解析をする. (5) クリープ域の設計はコード・ケースによる.	(1) 最大主応力説によって変形および破壊を考える. (2) 一定の許容応力で設計する. (3) フープ応力を制限すれば, その他はコードの設計計算でよい. (4) 疲れ解析をしない. (5) クリープ域の設計は規定した許容温度範囲なら容易に可能である.
施工に対する考え方	(1) 原則として溶接施工以外を考えない. (2) 溶接施工(ろう付を含む)を限定している. (3) 全数検査の可能な溶接施工を要求している. (4) 全数検査で継手効率は 1 としている.	(1) 種々の施工を許している. (2) 溶接施工法を限定していない. (3) 全数検査を要求しない. (4) 抜取り検査および非検査の場合は継手効率を下げる.
検査に対する考え方	特別に規定している. X線検査, 超音波検査, 磁粉検査, 液体浸透検査を規定している.	X線以外の検査を要求していない.
過圧試験に対する考え方	過圧試験を要求しているが慎重である. 過圧試験で損傷を生じない配慮をしている.	過圧試験を詳細に規定して健全性の保証を考慮している.

表4.2.2　Hopper 線図(ASME Code Section III)[4]

カテゴリー	一次応力			二次膜応力＋二次曲げ応力	ピーク応力
	一般膜応力	局部膜応力	曲げ応力		
説明	中実断面での平均一次応力．不連続および集中は除外する．機械的荷重によってだけ発生する．	任意の中実断面での平均応力．不連続は考えるが，集中は考えない．機械的荷重によってだけ発生する．	中実断面の重心からの距離に比例した一次応力の成分．不連続および集中は除外する．機械的荷重によってだけ発生する．	構造物の連続性を満足させるに必要な自己平衡応力．構造上の不連続部に生ずる．機械的荷重あるいは，熱膨張により生じ得る．局部的な応力集中は除外する．	(1) (切欠き)集中によって一次あるいは二次応力に加えられる増分 (2) 疲れを生じさせ得るが，しかし容器形状のゆがみは生じ得ないようなある一定の熱応力
符号	P_m	P_L	P_b	Q	F
応力成分の組合せおよび応力強さの限度	P_m — (S_m) P_L — ($1.5S_m$) P_m(あるいはP_L)$+P_b$ — ($1.5S_m$) P_m(あるいはP_L)$+P_b+Q$ — ($3S_m$) 注1 P_m(あるいはP_L)$+P_b+Q+F$ — (Sa) 注3 注2				

注1：二次応力が応力を解析する点での温度行程に起因する場合には，S_m の値は過度現象中の金属温度の最高値および最低値に対する N-421, N-422, N-423 表中の S_m 値の平均をとるべきである．二次応力の一部あるいはすべてが機械的荷重に起因する場合には，S_m の値は過度現象中の金属温度の最高値に対する S_m 値を採るべきである．

2：カテゴリー Q における応力は熱こう配，構造的不連続性，その他により生じ，かつその同一点に存在するかもしれない一次応力は含まないような全応力の一部である．しかしながら，詳細な応力解析を行った場合しばしば一次と二次応力の組合せが得られ，すなわちこの場合の計算値は Q 単独ではなくて P_m(あるいは P_L+P_b+Q の和)となることに注意しなければならない．同様にもしカテゴリー F における応力が応力集中により生ずる場合には，F 量は切欠きによって生じかつ公称応力に加わる加算的応力である．たとえば，もしある板の公称応力強さが S で，かつ応力集中率 K の切欠きがあるとすると，$P_m=S, P_b=0, Q=0, F=P_m(K\text{-}1)$ となり，したがってピーク応力強さは $P_m+P_m(K-1)=KP_m$ となる．

3：S_a は疲れ曲線である N-415(a), (a)両図から求まる．変動全範囲に対する許容応力強さは $2S_a$ となる．

4：P_m, P_L, P_b, Q, F という記号は単量を表示しているのではなく，六つの応力成分 $\sigma_t, \sigma_r, \sigma_l, \tau_{tl}, \tau_{lr}, \tau_{rt}$ の1組を表す．

$$\tau_Y = \frac{1}{2}\sigma_Y \tag{4.2.3}$$

と求まる．すなわち，単軸引張試験によって得られる降伏応力の半分に等しい．したがって，応力強さ(stress intensity)をSで表し，Sを次のように定義すれば，

$$S = \sigma_i - \sigma_j \qquad (i, j=1, 2, 3) \tag{4.2.4}$$

材料の降伏は stress intensity が降伏応力σ_Yに等しくなったとき生じることになる．

表 4.2.2 における代表的用語について説明する．

一次応力：外力，内力，モーメントの平衡条件式を満足するように決める応力であって，これが降伏応力を大幅に越えた場合には構造要素の破壊が生じうる．その意味では自己制限形(self-limiting)でない．熱応力は自己制限形であるため一次応力ではない．具体的例としては，内圧によって円筒ノズル部に生じた曲げ応力は一次応力として分類される．表からもわかるように，一般膜応力・局部膜応力・曲げ応力に分類される．

二次応力：構造要素内の隣接部分からの拘束あるいは自己拘束によって生じる応力である．当然自己制限形であって一般熱応力などがそのカテゴリーに入る．

ピーク応力：主として応力集中によって増大させられる応力．熱応力による増加応力も含む．具体例としては，局部的構造不連続部に生じる応力や，流体の急激な熱変化によって生じる熱応力，あるいは，オーステナイト系クラッド鋼の内部に生じる熱応力がその例として考えられる．

応力評価の手続を簡単に述べると次のようになる

(1) 構造要素内の考えている点における六つの応力成分，$\sigma_t, \sigma_r, \sigma_l, \tau_{tl}, \tau_{lr}, \tau_{rt}$ を計算する．

(2) 応力が次のどのカテゴリーに入るかを決める．

(a) 一般一次膜応力，P_m

(b) 局部一次膜応力，P_L

(c) 一次曲げ応力，P_b

(d) 二次応力，Q

(e) ピーク応力，F

(3) 六つの応力成分から主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を求める．

(4) 主応力差，S_{ij} を求める．

ただし，

$$S_{ij}=\sigma_i-\sigma_j$$

(5) S_{ij} のうち，最も大きいものを S として，この値が Hopper 線図に示されている許容値を越えないようにする．

ここに許容応力値 S_m 値は Section III の中に表として与えられており，かつ S_a 値は同コードの中に与えられている疲れ曲線(**図 4.2.1** に示されている)から値を読み取ればよい．つまり疲れ強さであり，得られた実験結果に対して，寿命で 20，強度で 2 の安全係数が考慮されている．

応力の分類例を**表 4.2.3**(4) に示す．各部の応力は表を参考にすれば，どの分類に入るかだいたいわかる．

疲れ解析に際しては，次のことを付記しておく必要があろう．

まず，負荷荷重の繰返し数が 10 回より少ないときには，疲れ解析を行う必要はない．また考えている疲れ強さは低サイクル疲れであるので，荷重の繰返し数が 10^6 より大きい場合には，安全側を見込んで $N=10^6$ のときのデータを使用する．また図 4.2.1 に示した疲れ設計曲線は，完全両振りによる実験結果に基づいて作成されているが，実際の構造物に作用する応力は，一般に完全両振状態にあるとはいいにくい．むしろそうでない場合が多いといえよう．その場合には，修正 Goodman 線図を使用することにしている．修正 Goodman 線図は

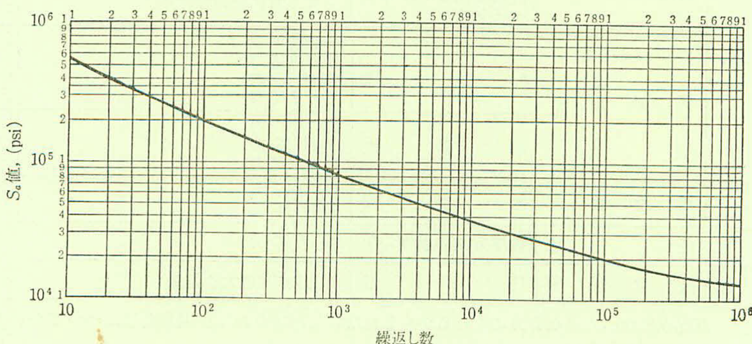


図 4.2.1 疲れにおける繰返し許容応力値 S_a

炭素鋼および合金鋼に対するものであって，適用温度範囲は 312°C まで

表 4.2.3　応力の分類例[4]

容器の部材	場所	応力の起因	応力の形式	分類
円筒あるいは球形胴板	不連続部から離れている胴板	内圧	一般膜応力 板厚方向のこう配	P_m Q
		軸方向 熱こう配	膜応力 曲げ応力	Q Q
	鏡板あるいはフランジとの結合部	内圧	膜応力 曲げ応力	P_L Q
任意の胴板あるいは鏡板	容器全体での任意の断面	外重荷，モーメントあるいは内圧	全断面で平均した一般膜応力 断面に垂直な応力成分	P_m
		外荷重あるいは外モーメント	全断面での曲げ応力，断面に垂直な応力成分	P_m
	ノズルあるいは開口の付近	外荷重，外モーメントあるいは内圧	局部膜応力 曲げ応力 ピーク応力（フィレットあるいはかど）	P_L Q F
	任意個所	胴板と鏡板との温度差	膜応力 曲げ応力	Q Q
皿形あるいは円すい形鏡板	冠部	内圧	膜応力 曲げ応力	P_m P_b
	ナックル部あるいは胴板との結合部	内圧	膜応力 曲げ応力	P_L* Q
平板鏡板	中央部	内圧	膜応力 曲げ応力	P_m P_b
	胴板との結合部	内圧	膜応力 曲げ応力	P_L Q
孔開き鏡板あるいは胴板	均一形状の典型的な帯板	圧力	断面で平均された膜応力 帯板の幅方向に平均，ただし板方向にこう配のある曲げ応力 ピーク応力	P_m P_b F
	孤立したあるいは型外れの帯板	圧力	膜応力 曲げ応力 ピーク応力	Q F F
ノズル	ノズル軸に垂直な断面	内圧あるいは外荷重または外モーメント	全断面で平均した一般膜応力，断面に垂直な応力成分	P_m
		外荷重あるいは外モーメント	ノズル断面での曲げ応力	P_m
	ノズル壁	内圧	一般膜応力 局部膜応力 曲げ応力 ピーク応力	P_m P_L Q F
		膨張差	膜応力 曲げ応力 ピーク応力	Q Q F
クラッド	任意個所	膨張差	膜応力 曲げ応力	F F
任意	任意	板厚方向の温度勾配	曲げ応力	F**
任意	任意個所	任意	応力集中（切欠き効果）	F

（注）*　直径板厚比の大きな容器に生じるかもしれないしわ寄りおよび過剰変形についても考慮しなければならない．

**　熱応力ラチェットについても考慮せよ．

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_u}+\frac{\sigma_a}{\sigma_{ea}}=1 \tag{4.2.5}$$

で与えられる．これから σ_{ea} を求めると，

$$\sigma_{ea}=\frac{\sigma_a}{1-\dfrac{\sigma_m}{\sigma_u}} \tag{4.2.6}$$

となる．この等価応力振幅 σ_{ea} は，平均応力が σ_m で，応力振幅が σ_a であるような繰返し応力と同等の疲れ損傷を与えると考えることができるため，両者の疲れ寿命は等しくなる．したがって等価応力振幅 σ_{ea} が，疲れ曲線から求められる S_a 値より小さければ，疲れ破壊は生じないことになって安全である．

また，変動荷重が負荷される場合には線形累積被害則を採用することになっている．つまり，変動応力値とその繰返し数の組合せを

$(\sigma_1, n_1), (\sigma_2, n_2), \cdots, (\sigma_n, n_n)$

とすれば，疲れ破壊は

$$U_f=\frac{n_1}{N_1}+\frac{n_2}{N_2}+\cdots+\frac{n_n}{N_n} \tag{4.2.7}$$

の値が1.0に等しくなったとき生ずるから，設計条件から計算される U_f の値が1より小さくなることを確かめれば構造要素は疲れ破壊しないことになる．

ここに，N_i は σ_i という応力が繰返し負荷されたときの疲れ寿命である．第3章で述べたように，平均応力が降伏応力を越えたときには，次のような修正を行うことになっている．

(1) $\sigma_a+\sigma_m\leq\sigma_Y$ の場合

$\sigma_m{}'=\sigma_m$

とする．

(2) $\sigma_a+\sigma_m>\sigma_Y$ でかつ $\sigma_a<\sigma_Y$ の場合

$\sigma_m{}'=\sigma_Y-\sigma_a$

とする．

(3) $\sigma_a\geq\sigma_Y$ の場合

$\sigma_m{}'=0$

とする．

このように決められた $\sigma_m{}'$ を平均応力として，以下必要な手続を踏んでゆけばよいのである．

4.2.3 ぜい性破壊に対する考え方

ASME Code Section III ではぜい性破壊に対する考え方としては Pellini らの fracture analysis diagram に基づいた思想を取り入れて，材料と使用温度との関係を NDT 温度をもとにして判別してきた．しかしながら Pellini らの思想には，たとえばぜい性破壊強度に及ぼす材料の板厚効果を説明できないなどの欠点が指摘されてきたこともあって，最近になって(1972 年) Appendix G (Protection Against Nonductile Failure) が追加され，その中で従来の破壊力学に基づいた考え方が設計思想の中に取り入れられるようになった．

Pellini がその後発表した変更によれば，従来 Pellini が主張してきた考え方は，厚さ 1 インチ (25.4 mm) 程度の鋼板に対して適用できるものであって厚さ 3 インチ (76 mm) 以上の鋼板についてはそのままは適用できない．

従来の考え方は，NDT 温度を基礎にして，FTE (Fracture Transition Elastic) 温度と FTP (fracture transition plastic) 温度を次のように定義して，構造物の使用温度を制限していた．

$$\mathrm{FTE} = \mathrm{NDT} + 60^\circ\mathrm{F}$$

$$\mathrm{FTP} = \mathrm{NDT} + 120^\circ\mathrm{F}$$

一方，修正された FAD (fracture analysis diagram) は，**図 4.2.2**[5] に示される．それによると，

$$\mathrm{FTE} = \mathrm{NDT} + 130^\circ\mathrm{F}$$

$$\mathrm{FTP} = \mathrm{NDT} + 170^\circ\mathrm{F}$$

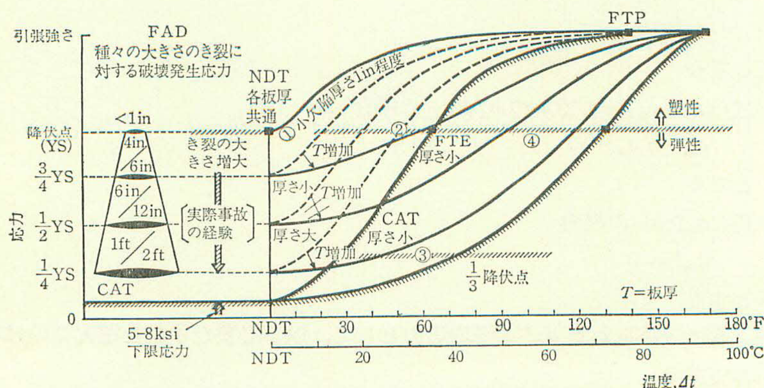


図 4.2.2 Pellini の Fracture Analysis Diagram

となる．同図で，従来の基準は厚さ小とマークされた曲線によって示されており，CAT(crack arrest temperature)曲線より高温側で使用されれば，板厚に無関係に構造物は安全に使用されるとしていた．新しい提案では，3インチ以上の鋼板に対しては，厚さ大とマークされたCAT曲線が判定の基準となる．ここで，安全に使用されるというのは，先在欠陥からなんらかの理由によってぜい性破壊が発生しても，それが伝播して最終破断には至らない，ということを示している．

たとえば，FTE(NDT+60°F)以上の温度では，応力が降伏応力に達していても，板厚に無関係にぜい性き裂は伝播しないとされていたのに対して新しい提案では，同温度で降伏応力以下の負荷応力でもき裂の伝播が生じる危険性があることを示していることになる．ASMEはしかしながら，このようなPelliniの新しい提案を採用することはやめて破壊力学に基づいた考え方を採用することにしたのであった．

次にAppendix Gの概要を以下に説明する．その考え方の特徴としては，それが線形弾性破壊力学に基づいていること，調査対象場所に最大仮想欠陥を想定することなどが挙げられる．

図4.2.3にNDT温度と参考応力拡大係数(reference stress intensity factor) K_{IR}の関係が示されている．同図で縦軸はK_{IR}であるが，横軸は材料の使用温度TとRT_{NDT}(参考NDT温度)との差で表示されている．その値が0の点は使用材料のNDT温度に対応していると考えればよい．この曲線はSA-533 Grade B鋼やSA-508鋼といった原子炉用鋼に関して得られた静的，動的破壊

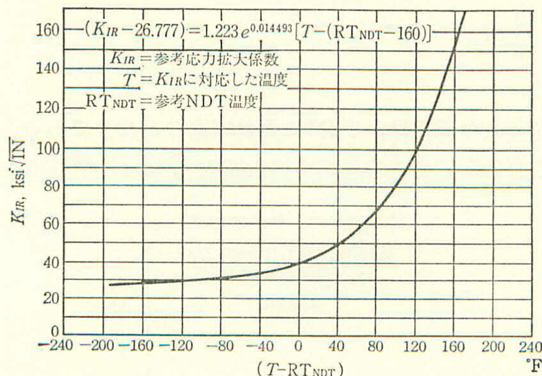


図4.2.3 参考応力拡大係数K_{IR}を求める図

靭性値および伝播停止限界 K_{IA} 値の下限値に等しく採られていると考えてよい．言い換えれば，この曲線から下側に位置するデータは，従来の実験結果からは一つも得られていないということである．そういう意味で，安全側のデータを示していることになる．この曲線は次式で近似される．

$$K_{IR} = 26.77 + 1.223\, e^{0.0145(T - RT_{\mathrm{NDT}} + 160)} \qquad (4.2.8)$$

ここに，K_{IR} の単位は ksi$\sqrt{\mathrm{in}}$ である．Appendix G で使用される仮想欠陥は，最大応力方向に直角な表面欠陥である．4 インチ(約 100 mm)から 12 インチ(約 300 mm)厚の板断面に対しては，欠陥の深さは厚さの 1/4 倍とし，長さは厚さの 1.5 倍とする．つまり**図 4.2.4** に示されるような表面欠陥が材料中に存在すると仮定するのである．12 インチより厚い断面に対しては，12 インチ厚断面に対する仮想欠陥を用いる．4 インチ厚より小さい断面に対しては，1 インチ深さの欠陥を想定すればよい．

このような欠陥に対する応力拡大係数 K_I 値は，

引張膜応力の場合

$$K_{Im} = M_m \times \text{膜応力} \qquad (4.2.9)$$

曲げ応力の場合

$$K_{Ib} = M_b \times \text{最大曲げ応力} \qquad (4.2.10)$$

で計算される．

ここに係数 M_m, M_b は**図 4.2.5** に σ/σ_Y をパラメータにして示してある．鋼材の板厚がわかれば，M_m の値を縦軸に読み取ることができる．そして係数 M_b の値は

$$M_b = \frac{2}{3} M_m \qquad (4.2.11)$$

から求められる．

図 4.2.5 が作られた根拠は，小倉*によれば次のとおりである．

図 4.2.4 の半長円形表面き裂の応力拡大係数 K 値は，引張応力に対しては，

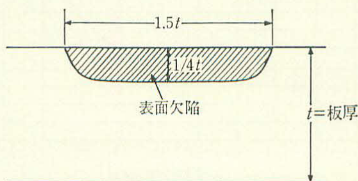


図 4.2.4　ASME Code Section III, Appendix G における最大仮想欠陥

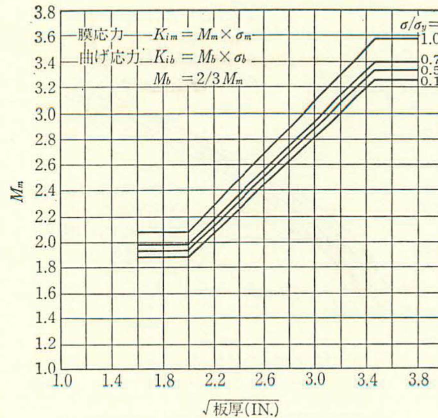


図 4.2.5 板厚と係数 M_m の関係

$$K=1.1\sigma\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{t_1}{Q}} \tag{4.2.12}$$

曲げ応力に対しては

$$K=M_b\sigma\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{t_1}{Q}} \tag{4.2.13}$$

となる**,***.

* 小倉信和：ASME における新しいぜい性破壊事故対策の方法，原子力構造機器の材料・設計・施工・検査に関する講習会テキスト，日本溶接協会，1974.

** G. M. Sinclair : Transaction of SAE, 1971.

*** E. J. Ripling and P. B. Closley : HSST Program, 5th Annual Meeting Paper No. 9.

ここに t_1 は切欠き深さを表しており，Q と M_b とはそれぞれ**図 4.2.6** と**図 4.2.7** とから求められる．もちろん(4.2.12)と(4.2.13)は理論値である．ここで，(4.2.13)によって与えられる K 値を 1.5 倍したものは，図 4.2.5 で与えられる K 値とよく一致する．また(4.2.12)によって与えられる K 値と，図 4.2.5 で与えられる K 値とを比較してみると，後者のほうが多少大きくなっている．簡略化を図り，かつ安全側の値を与えられることは設計上認容されるので，以上のデータをもとにして図 4.2.5 で与えられる設計曲線が採用されることになったと解釈することができるのである．

以上の手続きを踏んだ後，材質判定は次のように行えばよい．使用材料が決

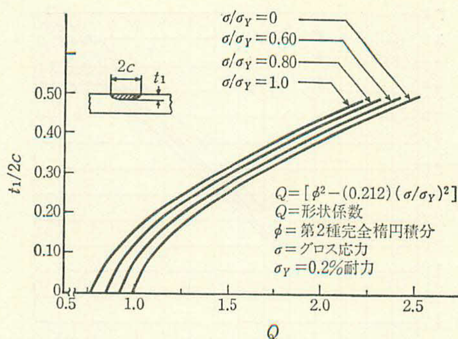


図 4.2.6　係数 Q の値

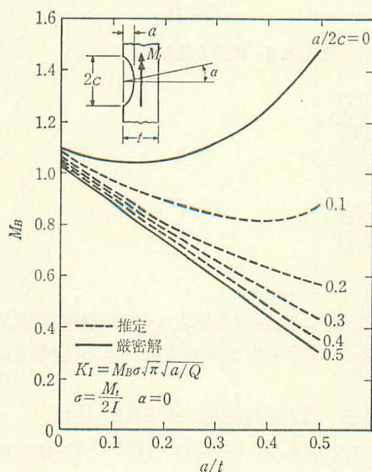


図 4.2.7　係数 M_B の値

まれば RT_{NDT} が求まり，使用温度が決まれば，それに対する K_{IR} が図 4.2.3 によって与えられる．また図 4.2.5 から得られる係数をもとにして計算した K_I 値は，最大仮想欠陥に関する応力拡大係数になっており，この値が K_{IR} よりも小さければ，材料のぜい性破壊は生じないことになる．

4.3 高温構造物の設計

4.3.1 Code Case 1592 の概要

高温構造物は原子力構造物以外の分野で既に多くの建造・稼動実績が積み重ねられてきた．たとえば化学プラントにおける高温反応容器や蒸気発生器，あるいは航空機工学におけるジェットエンジンなどをその例として挙げることができる．したがって，そのような高温構造物を建造するにあたってはそれなりの設計法が存在したし，現在もまた存在しているわけであるが，体系だった高温構造設計手法が本格的に問題視されるようになったのはごく最近のことである．同設計手法の確立の必要性は，高速炉，高温ガス炉といった新形原子炉の高温化に関する問題点の中で，その必要性が特に痛感されたのである．高温構造設計手法の適用の可否は，構造物の使用温度が使用材料のクリープ温度域にあるか否かによると一応考えてよいであろう．使用温度が材料のクリープ温度域以下にあるような原子炉構造物に対しては，今までに述べてきた ASME Code Section III を適用することで十分である．

ASME はそれらの社会的必要性を背景にして，原子力高温構造物に関する定量的な規則体系を開発し始めて，いわゆる Case Interpretation 1331 を発行したのである．Case Interpretation はその後改良に改良を重ねられて，1974 年に Case Interpretation 1592 が発行されたのである．これはかなり体系だった規格になっており，着実な進歩の跡がうかがえる．Case Interpretation 1592 が従来の構造設計指針と大きく異なる点は次のとおりである．

(1) クリープ挙動に原因する破壊モードを考慮の対象としている．

(2) 機器の使用時間に対応した許容応力体系を導入している．

(3) クリープ損傷評価法として linear life fraction rule を採用している．

(4) クリープと疲れの相乗効果の評価を必要としている．

(5) 進行性変形，ひずみ量に関連して，その制限値を設定している．

(6) 非弾性解析を含めたかなりの量の構造解析を要求している．

使用温度が使用材料のクリープ温度域内にある場合は，当然のことながらクリープによる破壊モードを考慮の対象に仮定する必要が生じるし，クリープ破壊の性質を考えれば，使用時間に対応した許容応力体系を導入するのは妥当で

あると思われる.

4.3.2 設計評価の流れ

同コードのホッパ線図を図 4.3.1 に示す. 同図から明らかなように, 対象としている条件は, 設計条件, 通常および変動状態, 緊急状態, 損傷状態である

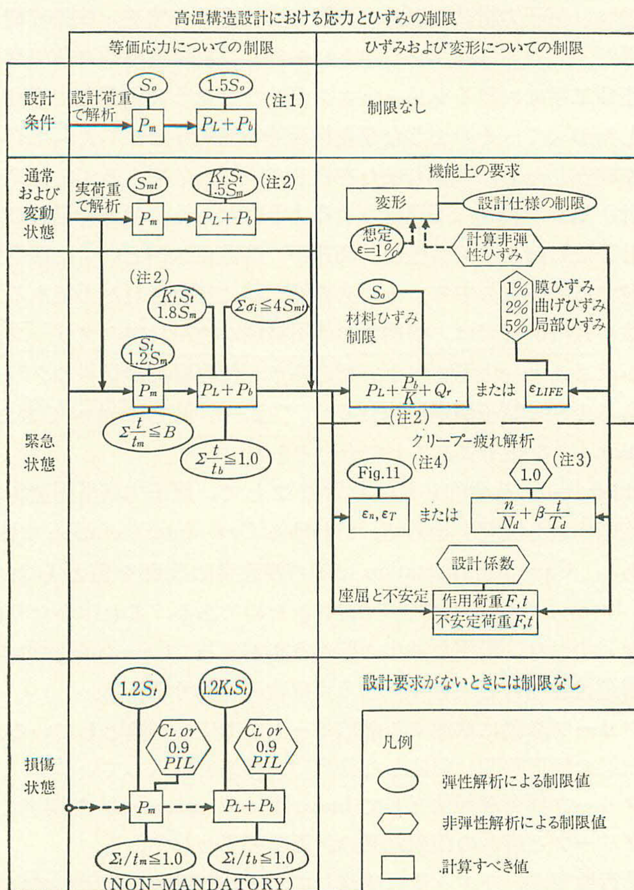


図 4.3.1 Case Interpretation 1592 のホッパ線図

(注1) 単純代数和でなく 6 応力成分でそれぞれ計算する. P_L は P_m を含む.

(注2) $K_t=1+K_2\left(1-\frac{P_L}{S_t}\right)$, $K_2=\alpha(K-1)$, K=断面係数, $\alpha=0.5$

(注3) β : クリープ損傷係数=1 とする.

(注4) コードにおける Fig. 11

る．４角で囲まれている値が計算すべき値であり，長円あるいは六角形で囲まれた制限値と比較して，それ以下であることを確認すべきである．

このとき評価の手続は次のように行われる．

(1) 直交座標系や応力名称の設定

(2) 各荷重について応力値を算出し，P_m, P_L, P_b, Q, F のどの分類に入るかを決定する．

(3) 各荷重による応力成分を代数的に加え合せた後，主応力を求める．

(4) 主応力差を求め，そのうち絶対値の最大のものを応力強さ(stress intensity)とする．

以上の手続の中で得られた値のうち，規制されるべき量をホッパ線図に基づいて評価してゆけばよいことになる．そのためには，規制量の意味を明確にしておく必要がある．

S_0：許容応力強さ．常温では，最小引張強さの 1/4，最小降伏強さの 5/8，のうちのいずれか小さいほうの値．高温では，平均引張強さの 1/4，平均降伏強さの 5/8，ステンレス鋼，高合金鋼では平均降伏強さの 0.9 倍，のうちのいずれか小さいほうの値．または 1 000 時間で 0.01% のクリープひずみを生じる応力，10^5 時間最小クリープ破断強さの 0.8 倍，10^5 時間平均クリープ破断強さの 0.67 倍のうちのいずれか小さいほうの値．

S_{mt}：S_m 値と S_t 値とのいずれか小さいほうの値．

S_m：Section III で規制されている許容応力強さであって，常温では引張強さの 1/3，降伏強さの 2/3 のいずれか小さいほうの値．高温では，高合金鋼ステンレス鋼を対象にして，平均引張強さの 1/3，平均降伏強さの 0.9 倍のうちのいずれか小さいほうの値．

S_t：温度と時間とに依存する応力強さの制限値．単軸試験によって得られる量であって，１%の全ひずみ(クリープひずみも含む)，三次クリープ開始，クリープ破断をそれぞれ生じさせる応力．

S_q：サイクル中の金属の最高温度と最低温度とにおける 0.2% 耐力の平均値，または最高温度における 10^4 時間の S_t 値の 1.25 倍のうちのいずれか小さいほうの値．

S_y：与えられた温度におけるひずみ速度 $0.005(\mathrm{min})^{-1}$ での単軸引張試験で得られる最小降伏応力

Q_r：二次応力範囲

表 **4.3.1**　最大許容応力強さ S_0(ksi)(設計条件に対するもの)

温度(°F)	304 SS	316 SS	Ni-Fe-Cr Alloy 800 H 焼　準	$2^1/_4$ Cr-1 Mo
700				15.0
750				15.0
800	15.1	15.8	15.3	15.0
850	14.9	15.7	15.1	14.4
900	14.6	15.5	14.8	13.1
950	14.3	15.4	14.6	11.0
1 000	13.7	15.3	14.4	7.8
1 050	12.1	14.5	13.7	5.8
1 100	9.7	12.4	13.5	4.2
1 150	7.7	9.8	11.2	3.0
1 200	6.0	7.4	8.4	1.6
1 250	4.7	5.4	6.9	
1 300	3.7	4.1	5.4	
1 350	2.9	3.0	4.5	
1 400	2.3	2.2	3.6	
1 450	1.8	1.7	—	
1 500	1.4	1.2	—	

〔注〕 ksi＝0.7 kg/mm²

設計を進めるうえでまず必要な量は S_t 値である．S_0, S_m の意味は既に明らかであり，S_0 の値を表 **4.3.1** に示す．また S_m 値は Section III の値を用いる．したがって，S_{mt} は S_t 値が与えられれば決定される．図 **4.3.2** に，S_t 値の構成の一例を SUS 304 について示す．曲線群は温度がパラメータになっている．同図には，それと同じデータを示す表もあわせて示してある．また $2\frac{1}{4}$ Cr-1 Mo 鋼の S_{mt} 値の構成の一例を図 **4.3.3** に示す．

制限条件をホッパ線図で定義された状態ごとに記述すると次のようになる．

(1) 通常状態と変動状態(normal and upset conditions)

応力値は弾性計算によって求め，次の制限を満足しなければならない．

(a) 全運転寿命中に考えられる壁平均温度の最高値 T と負荷全時間 t とに対応した使用材料の S_{mt} に関して，

$$P_m \leq S_{mt} \tag{4.3.1}$$

(b) t が全規定運転時間より小さいときは，次の緊急状態における項目(b)で規定される累積損傷を考慮する．

温度 °F ＼ 時間 hr	1	10	30	10^2	3×10^2	10^3	3×10^3	10^4	3×10^3	10^5	3×10^5
800	20.4	20.4	20.4	20.4	20.4	20.4	20.4	20.4	20.4	20.4	20.4
850	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	19.9	19.8	19.3
900	19.6	19.6	19.5	19.5	19.4	19.2	18.8	18.5	18.3	17.7	16.0
950	19.1	19.1	19.0	18.7	18.2	17.5	17.2	16.9	16.2	14.2	12.2
1 000	18.5	18.4	17.8	16.9	16.2	15.9	15.5	14.7	13.1	11.1	9.3
1 050	18.0	17.7	17.1	16.2	15.5	14.9	14.1	12.2	10.3	8.7	7.3
1 100	17.6	17.1	16.3	15.3	14.5	13.5	11.5	9.7	8.2	6.8	5.7
1 150	17.0	15.7	14.8	13.8	12.9	11.0	9.3	7.7	6.4	5.3	4.4
1 200	16.0	14.2	13.3	12.2	10.6	8.9	7.4	6.1	5.1	4.1	3.4
1 250	14.7	12.9	11.9	10.3	8.7	7.2	5.9	4.9	4.0	3.2	2.7
1 300	13.4	11.4	10.0	8.5	7.0	5.9	4.8	3.9	3.2	2.5	2.1
1 350	12.2	9.7	8.4	7.1	5.9	4.8	3.9	3.1	2.5	2.0	1.6
1 400	10.8	8.1	6.9	5.9	4.8	3.9	3.1	2.5	2.0	1.6	1.2
1 450	9.3	6.8	5.9	4.6	3.8	3.0	2.4	1.9	1.5	1.2	0.9
1 500	7.9	5.3	4.4	3.5	2.8	2.2	1.7	1.3	1.0	0.8	0.6

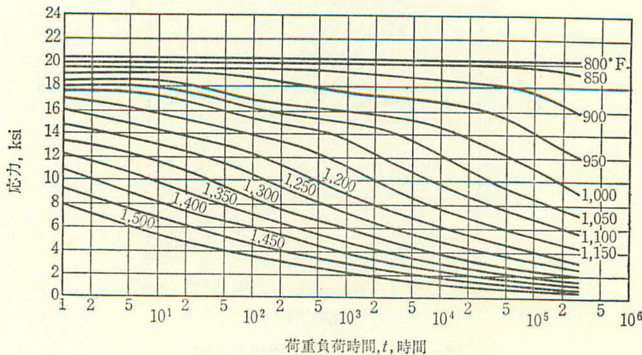


図 **4.3.2**　S_t 値の構成の例(SUS 304 SS)

(c)
$$P_L+P_b \leq \begin{cases} 1.5\,S_m \\ K_t S_t \end{cases} \tag{4.3.2}$$

あるいは

$$(P_L+P_b)/1.5 \leq S_m \tag{4.3.3}$$

$$P_L+\frac{P_b}{1+k_s} \leq S_t \tag{4.3.4}$$

ここで

時間 hr ＼ 温度 °F	10	30	10^2	3×10^2	10^3	3×10^3	10^4	3×10^4	10^5	3×10^5
700	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9
750	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9
800	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	17.9	16.1
850	17.6	17.6	17.6	17.6	17.6	17.6	17.6	16.3	14.0	12.3
900	17.2	17.2	17.2	17.2	17.2	16.5	14.4	12.5	10.9	9.6
950	16.7	16.7	16.7	16.3	14.8	13.2	11.3	9.7	8.4	7.3
1 000	15.9	15.5	14.2	13.1	11.9	10.4	8.7	7.5	6.3	5.2
1 050	13.8	12.5	11.2	10.2	9.3	7.9	6.7	5.7	4.7	4.0
1 100	11.0	10.0	9.0	8.2	7.2	6.2	5.0	4.1	3.3	2.7
1 150	8.8	8.0	7.2	6.3	5.4	4.5	3.6	2.8	2.3	1.8
1 200	6.2	6.1	5.9	5.1	4.1	3.4	2.7	2.2	1.7	1.4

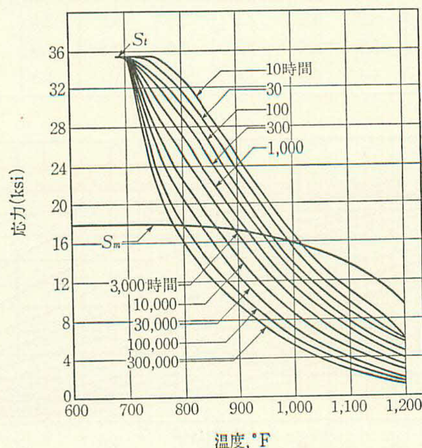


図 **4.3.3**　S_{mt} 曲線の構成の 1 例

$2\frac{1}{4}$Cr-1 Mo 鋼

$$K_t = 1 + k_s\left(1 - \frac{P_L}{S_t}\right) \tag{4.3.5}$$

でかつ $k_s = \alpha(K-1)$

ただし，

K = 断面係数　　$\alpha = 0.5$

(d) t が運転寿命より小さい場合は，$(P_L + P_b)$ の累積効果は次の緊急状態における項目(d)で評価する．

(2) 緊急状態(emergency conditions)

応力値は弾性計算により求め，以下の制限に従う．

(a) $$P_m \leq \begin{cases} 1.2S_m \\ 1.0S_t \end{cases} \tag{4.3.6}$$

(b) 通常，変動，緊急状態において

$$\sum\left(\frac{t_i}{t_{im}}\right) \leq B \tag{4.3.7}$$

ここに t_i は規定荷重 P_{mi} が温度 T で作用している全期間，t_{im} は S_t–t 曲線から決められる荷重応力強さ S_t での最大許容時間で，決定法は図 **4.3.4** に示されている．B は 1.0，ただし設計仕様で指定されていれば 1 より小さくてよい．

(c) $$P_L+P_b \leq \begin{cases} 1.8S_m \\ K_tS_t \end{cases} \tag{4.3.8}$$

(d) $$\sum\left(\frac{t_i}{t_{ib}}\right) \leq 1.0 \tag{4.3.9}$$

ここに t_i は温度 T_i で荷重が作用している期間，t_{ib} は図 **4.3.5** にその決定法が模式的に示されている．

(3) 損傷状態(faulted conditions)

(a) 公衆の健康と安全とを考慮して要求事項をあらゆる瞬間に満足しなければならない．

(b) $$P_m \leq \begin{cases} P_m \text{ に対する Appendix F の限界} \\ 1.2S_t \end{cases} \tag{4.3.10}$$

(c) $P_{mi}/1.2$ を用いて緊急状態の(b)を適用する

(d) $$P_L+P_b \leq \begin{cases} (P_L+P_b) \text{ に対する Appendix F の限界} \\ 1.2K_tS_t \end{cases} \tag{4.3.11}$$

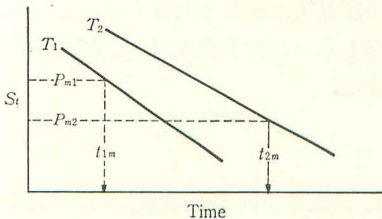


図 **4.3.4** t_{im} の求め方

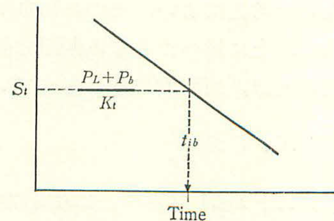


図 **4.3.5** t_{ib} の求め方

(e) $(P_L+P_b)/1.2K_t$ を用いて緊急状態の b を適用する.

4.3.3 ひずみと変形との制限

次にひずみと変形との制限について述べなければならない. Case Interpretation 1592 ではひずみ, 変形および疲れについても制限を設けており, それは Appendix T で規定されている. したがってここでは Appendix T の概要について説明する.

一般的要求として, 変形とひずみ量の算出のためには, 非弾性解析が必要である. そして, 制限事項は図 4.3.1 に示されているとおり, 設計条件においては制限項目がないため解析の必要性はなく, 損傷状態においては, 設計仕様に明示されない項目については解析の必要性はない.

使用機器の構造安全性を確保するためのひずみ制限は, 次のようになされている. すなわち, 最大累積非弾性ひずみは,

(a) 厚さ方向の平均ひずみに関しては 1 %

(b) 厚さ方向の相当直線ひずみ分布による表面でのひずみに関しては 2 %

(c) 任意点での局部ひずみに関しては 5 %

で, 与えられるひずみ値を越えてはならない.

曲げひずみのように構造物の表面に大きいひずみを生じる場合には, 当然膜ひずみの場合より制限値は大きくてさしつかえない. 一般に曲げひずみの場合には, 反対側に圧縮ひずみを生ずるため, 表面ひずみだけで構造物が大きく変形することはないと考えられる. しかしながら, あまりに大きなひずみを許容すると, 表面き裂が発生する可能性が出てくるし, 断面内がプラスチック・ヒンジになる可能性も出てくる.

普通, 切欠きや幾何学的不連続部に大きな局部ひずみが生じるのを避けることは困難である. そしてこの局部ひずみは構造物全体の変形にはほとんど寄与しないと考えてよい. そのためひずみ値の制限値は 5 %と大きくなっている.

次に, 上に述べたひずみ制限は弾性計算を用いて行う次の三つの制限条件を満足すれば, 自動的に満たされているとする.

(1) $$X+Y \leq \frac{S_a}{S_Y} \tag{4.3.12}$$

(2) $X+Y \leq 1$ でかつ, 二次応力範囲 Q_R の板厚方向平均温度が 10^5 時間の S_t と S_m とが等しくなる温度以下であること. (4.3.13)

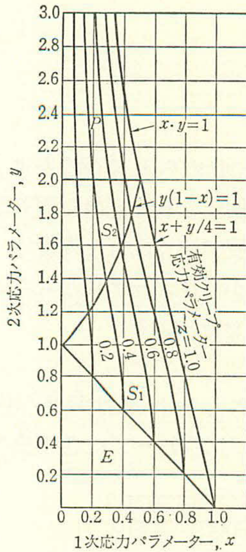


図 **4.3.6** 弾性解析時のひずみ制限

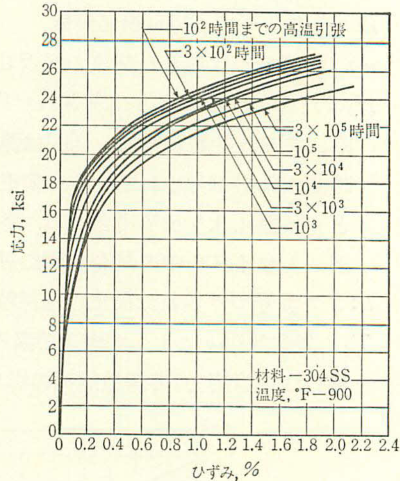


図 **4.3.7** 等時応力-ひずみ曲線

(3) (a) 不連続部から離れた軸対称構造物に対して，Q_R を定義する温度がクリープ以下であれば，上記(1)と(2)との制限項目は満足しなくてよい．

(b) 図 **4.3.6** から求まる有効クリープ応力 σ_c の 1.25 倍に対応するクリープひずみを等時応力ひずみ曲線から求めて，それが 1 %以内であればよい．溶接金属については 1/2% 以内とする．等時応力 - ひずみ曲線の例を図 **4.3.7** に示す．

ここで，X, Y は

$$X=\left(P_L+\frac{P_b}{K_t}\right)_{\max}\div S_Y$$

$$Y=(Q_R)_{\max}\div S_Y$$

で与えられる．また，S_a はサイクル間の平均壁温度の最大値と最小値とに対応した(最小)降伏応力の平均値と，$1.25S_t$ (10^4 時間での値)のうちのいずれか小さいほうの値である．

4.3.4 疲れとクリープの相互効果

Case Interpretation 1592 では，既に述べたように，疲れとクリープとの効

果についても考慮するようになっている．

いま，各係数を次のように定義する．

D：全クリープ－疲れ損傷係数

n：jで番号づけられた荷重の繰返し数

N_d：たとえば**図 4.3.8** に示された疲れ曲線から求められる荷重条件jに対応する設計許容寿命．同図は弾性解析用に使用されるもので荷重保持時間の効果が含まれている．荷重の繰返し速度が速くなった場合は，たとえば**図 4.3.9** が使用される．各曲線は温度がパラメータになっているが，1サイクル中の最高温度に対応した曲線を使用する．

t：kで番号づけされた荷重の保持時間

T_d：荷重条件kによって構造要素内に生じる応力強さ（弾性解析の場合）または相当応力（非弾性解析の場合）に対応したクリープによる許容時

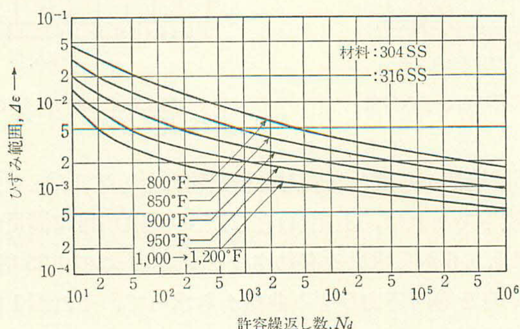


図 4.3.8　設計許容繰返し数とひずみ範囲の関係（304 SS と 316 SS）

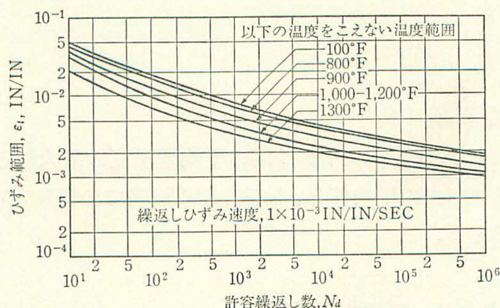


図 4.3.9　設計許容繰返し数とひずみ範囲の関係（304 SS と 316 SS）——ひずみ速度が大きい場合

最小破断強度 ksi

時間 hr / 温度 °F	1	10	30	10^2	3×10^2	10^3	3×10^3	10^4	3×10^4	10^5	3×10^5
800	57	57	57	57	57	57	57	57	51	44.3	39
850	56.5	56.5	56.5	56.5	56.5	56.5	50.2	45.4	40	34.7	30.5
900	55.5	55.5	55.5	55.5	51.5	46.9	41.2	36.1	31.5	27.2	24
950	54.2	54.2	51	48.1	43	38.0	33.5	28.8	24.9	21.2	18.3
1 000	52.5	50	44.5	39.8	35	30.9	26.5	22.9	19.7	16.6	14.0
1 050	50	41.9	37	32.9	28.9	25.0	21.6	18.2	15.5	13.0	11.0
1 100	45	35.2	31	27.2	23.9	20.3	17.3	14.5	12.3	10.2	8.6
1 150	38	29.5	26	22.5	19.3	16.5	13.9	11.6	9.6	8.0	6.6
1 200	32	24.7	21.5	18.6	15.9	13.4	11.1	9.2	7.6	6.2	5.0
1 250	27	20.7	17.9	15.4	13	10.8	8.9	7.3	6.0	4.9	4.0
1 300	23	17.4	15	12.7	10.5	8.8	7.2	5.8	4.8	3.8	3.1
1 350	19.5	14.6	12.6	10.6	8.8	7.2	5.8	4.6	3.8	3.0	2.4
1 400	16.5	12.1	10.3	8.8	7.2	5.8	4.7	3.7	3.0	2.3	1.9
1 450	14.0	10.2	8.8	7.3	5.8	4.6	3.8	2.9	2.3	1.8	1.4
1 500	12.0	8.6	7.2	6.0	4.9	3.8	3.0	2.4	1.8	1.4	1.1

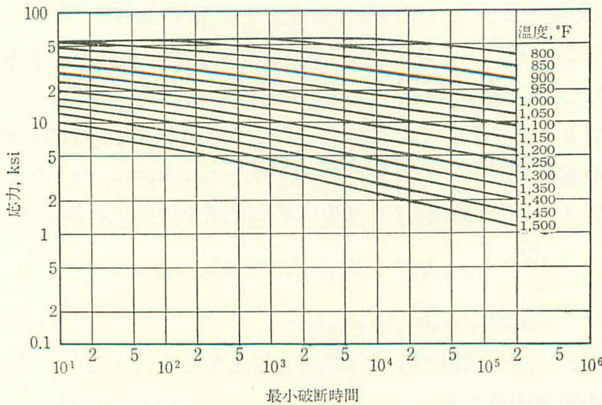


図 **4.3.10**　クリープ破断強度(304 SS)

間．具体的には，たとえば図 **4.3.10** に示されるクリープ破断強さ曲線で与えられる応力を 0.9 で除した値として採用される．

そうすると，クリープ－疲れ損傷に対する制約条件は次式で与えられる．

$$\sum_{j=1}^{P}\left(\frac{n}{N_d}\right)_j+\sum\left(\frac{t}{T_d}\right)_k \leq D \qquad (4.3.14)$$

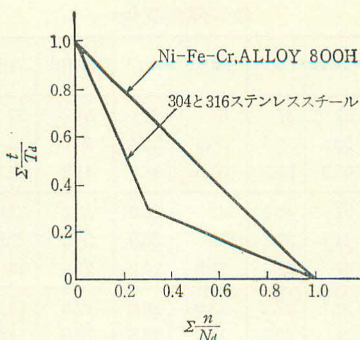


図 **4.3.11** クリープ-疲れ損傷

ここに D の値は図 **4.3.11** から求めることができる．要するに制限内容は，鋼種ごとに分けられた線以下の範囲にあれば，安全側にあるとする．

図 4.3.8 あるいは図 4.3.9 を使用するとき，縦軸のひずみ範囲を求める必要があるが，その手続は以下のとおりである．

ステップ 1 ：完全なサイクルのひずみ履歴($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$ の時間変化)に関して，すべてのひずみ成分を計算する．

ステップ 2 ：そのサイクルの中で極値(最大ひずみか最小ひずみのいずれか)になる状態を決めて，添え字を付ける．

ステップ 3 ：サイクル中の各時点におけるひずみ成分値から，時刻 i における値を差し引く．すなわち $\varDelta\varepsilon_x=\varepsilon_x-\varepsilon_{xi}$, $\varDelta\varepsilon_y=\varepsilon_y-\varepsilon_{yi}$ などを求める．

ステップ 4 ：各時点における相当ひずみ範囲を次式で計算する．

$$\varDelta\varepsilon_{eq}=\frac{\sqrt{2}}{3}[(\varDelta\varepsilon_x-\varDelta\varepsilon_y)^2+(\varDelta\varepsilon_y-\varDelta\varepsilon_z)^2+(\varDelta\varepsilon_z-\varDelta\varepsilon_x)^2 +6(\varDelta{\varepsilon_{xy}}^2+\varDelta{\varepsilon_{yz}}^2+\varDelta{\varepsilon_{zx}}^2)] \tag{4.3.15}$$

ステップ 5 ：疲れ曲線のひずみ範囲と対比させるときには，最大相当ひずみ範囲を使用する．

ここに最大相当ひずみ範囲を求める上記の手続の中で，ひずみ集中係数が存在するときにはそれも考慮する．また，上記の手法は主ひずみ方向が変化する場合にも適用される．

疲れ損傷評価は次のようにして行う．

(1) ひずみ速度を決めて，図 4.3.8 と図 4.3.9 のうちどの設計曲線を使うか決定する．

(2) 次式によって非弾性ひずみを計算する.

$$\varepsilon_T = K_\epsilon \cdot \varepsilon_e + K_\epsilon^2 \cdot \varepsilon_P + K_T \cdot \varepsilon_F$$

ここに，ε_e：ひずみ集中を考えない弾性ひずみ，ε_P：ひずみ集中と熱ひずみを含まない非弾性ひずみ，ε_F＝ピーク熱ひずみ，K_ϵ＝理論弾性ひずみ集中係数，K_T＝ピーク熱ひずみ成分に適用されるひずみ集中係数

(3) 全公称ひずみを次式で求める.

$$\varepsilon_P = \varepsilon_n - \varepsilon_e$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{LC} + \frac{1}{E} S_{SC}$$

ここに，ε_{LC}＝荷重制御時のひずみ，S_{SC}＝ひずみ制御時の応力

(4) 求められた非弾性ひずみより，その成分に分解するのには塑性式を適用する.

また，クリープ損傷の評価は，次のようにして行う.

すなわち荷重状態 k に対応した一次＋二次応力から求まる応力強さ S は，次の(1)と(2)とのうち小さいほうの値で与えられる.

(1) 使用材料の最小規定降伏強さ

(2) S_r を一次＋二次応力強さの最大範囲として，$P_m + 0.5\,S_r$

したがって，T_d の値は上記の応力値を係数 0.9 で割った値を縦軸にして，図 4.3.10 から求めることにする.

4.4 原子力施設の耐震設計

いうまでもなく日本は地震国である. そのためわが国に設置される原子力施設の地震に対する安全性は，他国にも増して十分に確保される必要性がある.

これまで日本に設置された原子力発電施設については，技術指針を作成してそれに基づいて設計がなされてきたが，耐震設計法が現在既に完成しているとはいいにくく，今もなお関係者によって改良が推進されている. ここでは，現在既に存在する耐震設計法の詳細を述べることはしないで，その基本的な考え方について述べることにする.

4.4.1 基本的考え方

原子力発電施設の耐震設計の目的は，それが大地震に遭遇した場合でも，近

辺の公衆や従業員に放射線障害を与えないようにすることである．そのためには，施設の損傷が放射線障害の原因となるもの，またはその役割が放射線障害の拡大の防止にあるものについては，ほかの原子力発電以外の施設よりもきびしい耐震設計が必要と考えられる．

原子力発電施設は設置計画の段階から安全性評価が行われる．安全性評価の目的は，想定される事故の発生を仮定し，それに対する各種保護系の正常な作動によって，公衆を放射線障害の危険にさらさないことを明らかにするために実施される．事故の種類としては，技術的見地から見て最悪の場合には起こるかもしれない“重大事故”と，更にそれを上回り技術的見地からは起こるとは考えられない“仮想事故”が想定される．軽水炉の場合には，主配管破断による冷却材喪失事故(loss of coolant accident)がその例として考えられる．そのような事故に際して，放射線障害の拡大を最終的に防止する原子炉格納容器については，事故時の条件と地震荷重とを重畳させるという考え方が採られている．

耐震設計の流れは，

(1) 重要度に応じた設計用地震の決定

(2) 建屋の振動応答解析

(3) 建屋各床の地震動特性スペクトルの作成

(4) 機器の振動応答解析

(5) 応力解析

(6) 許容応力との比較

(7) 安全性評価

となるのが普通である．

耐震重要度は表 **4.4.1** に示すように，Aクラス，Bクラス，Cクラスの3種

表 4.4.1　原子力発電施設の耐震重要度クラスの定義*

クラス	定　義
A	その機能喪失が原子炉事故をひき起こすおそれのあるもの，および原子炉事故の際に放射線障害から，公衆を守るために必要なもの． Aクラスのうちでも安全上特に重要なもの，すなわち原子炉格納容器，原子炉停止装置は通常 As クラスに分類される．
B	高放射性物質に関連するもので，Aクラスに属する以外のもの．
C	AクラスおよびBクラス以外のもので，通常の耐震性を要するもの．

に分かれる．

*　加藤：原子力施設耐震設計の現況，日本機械学会誌，**79**，689，昭和51年4月．

Aクラスは，機能喪失が原子炉事故をひき起こす可能性があり，かつ原子炉事故時に放射線障害から公衆を守るために必要なものとして定義される．Aクラスのうち安全上特に重要な原子炉格納容器や原子炉停止装置は普通Asクラスとして分類される．**表4.4.2**に各施設の耐震重要度クラスの分類例を示す．

表4.4.2　各施設の耐震重要度クラスの分類表(BWR)**

クラス	建物・構築物	機器・配管
A	原子炉建屋(原子炉二次格納施設) 中央制御室など 特に，格納容器はAs	原子炉容器 原子炉一次冷却系 原子炉非常用冷却系 格納容器冷却系など 特に，原子炉制御棒系統はAs
B	タービン建屋 放射性廃棄物処理建物など	原子炉補助設備 廃棄物処理系 タービンなど
C	一般建物	一般機器，配管類

**　加藤：原子力施設耐震設計の現況，日本機械学会誌，**79**，689，昭和51年4月．

Bクラスは，高放射性物質に関連した施設でAクラスに属する以外のものとして定義される．

CクラスはAクラスおよびBクラス以外のもので，通常の耐震性を有するものとして定義される．

耐震設計で考慮される地震には，設計地震と安全余裕検討用地震がある．設計地震は当該敷地で予想される最強の地震であり，敷地付近において入手し得る地震歴，地盤条件等を参考にしてその強さが決定される．安全余裕検討用地震はAsクラスに属する施設に対して適用されるものであって，通常，設計地震の約1.5倍の強さの地震波を用いる．

4.4.2　建物・構築物の耐震設計

通常の建物・構築物については，建築基準法およびその施行令の中に，耐震設計法の概念と基本的な数値が定められている．そこでは，いわゆる水平震度が定められており，この震度に基づく地震力を想定して静的な応力計算を行

い，地震力以外の荷重による応力と重畳させて，その合成応力が定められた材料の許容応力以内にあることを確認することが要求されている．原子力発電所といえども発電所施設のうち建物・構築物については少なくとも上記の耐震設計条件が満足されるものでなければならない．

したがって，原子力発電所施設のうち通常の建物・構築物と同程度の設計でよいものはCクラスに分類し，建築基準法に準じた設計とする．しかしながら，原子力発電施設に固有の構築物で，破損により放射性物質の汚染ないしは飛散事故を伴うおそれのあるものについては，基準震度の値を割増しして，地震によりそのような事故が発生することを防ぐようにしている．先に述べたようにこれらの建物・構築物でも，予想される事故の程度により設計に差を設けることが行われる．すなわち，高放射性物質を内蔵する施設はBクラス，また機能喪失により原子炉事故をひき起こすおそれのあるもの，および原子炉事故の際に放射線障害から公衆を守るために必要な施設はAクラスに分類し，上記割増し率をBクラスで1.5倍，Aクラスで3倍とすることが慣例になっている．

また通常の建物では地震時の変形量を具体的な設計内容に含むことはまれで，従来の震度法では起こり得るであろう変形量を求めることを考えていない．しかしながら原子力発電所の場合，構築物相互間の相対変位を求める必要があり，このためどうしても動的解析によらなければならないし，更に，機器・配管系の動的耐震設計を行うときにも，それらを支持する構築物について，動的解析を行う必要がある．

日本電気協会の“原子力発電所耐震設計技術指針”によれば，格納容器についての許容応力は次のようになっている．

(1) (事故時荷重)＋(地震力)＋(自重など常時荷重)に対して

P_m : $1.2\,S$ または $\frac{15}{16}S_y$ のうち大なるほう

P_L+P_b : $1.8\,S$ または $\frac{15}{16}\times 1.5\,S_y$ のうち大なるほう，または $0.8\,C_L$

(2) (地震力)だけに対して

$(P_L+P_b+Q)_E$: $3\,S_m$，ただし応力 Range について

ここに，P_m は一次一般膜応力，S_m は基本許容応力強さ，$\left\{\frac{3}{2}S_y, 8\frac{1}{3}S_u\right\}$ のうちの小さいほうの値，S_y は使用条件における降伏応力，S は基本許容応力度，

$\left\{\frac{5}{8}S_y, \frac{1}{4}S_u\right\}$のうちの小さいほうの値，$S_u$は使用条件における引張強さ，$P_L+P_b$は一次局部膜応力と一次曲げ応力とを加えて求めた応力強さ，$(P_L+P_b+Q)_E$は設計地震だけによって生ずる一次応力と二次応力とを加えて求めた応力強さのサイクルの最大値と最小値との差，C_Lは崩壊荷重条件(S_yまたは$1.5\,S_m$をベース)である．

4.4.3　機器・配管系の耐震設計

機器・配管系の耐震設計は建築物などの耐震設計と比べて，次の点において明らかな差があるとしなければならない．

(1)　機械構造物の振動特性

(2)　〃　の荷重特性

(3)　〃　の破壊特性

振動特性について述べると，固有振動数と減衰定数とが広範囲に分布していること，振動方向が三次元的であることなどがその特徴である．

荷重特性についていうと，設計の対象となる機械構造物の主要な部分は，いわゆる冷却材圧力バウンダリなどの内圧による荷重を受けることが多い．またその使用温度が常温より高く，それによる熱応力がこに加わることも多い．これらの荷重による応力は許容応力内での取り分のかなりの割合を占め，しかも破壊の発生に際して解放されるエネルギーが，地震荷重による破壊エネルギーに比べてはなはだしく大きいものがある．したがって，この場合には地震荷重は破壊発生の引き金であるにすぎないのである．

破壊特性の差については，コンクリートを主体とする構造物と鋼構造物との差もある．前者は破壊は一般に漸進的であって，その進展にしたがって吸収されるエネルギーは大きい．

次に設計法の概要について述べる．先に述べたように，基本的には対象となる機器・配管を重要度によって3種類に分類すること，更にAクラスのうちの特定のものはAsクラスに分類し，安全余裕検討用地震に対して安全であるか否かを検討することなどがある．

図4.4.1に耐震設計手法の流れを示してある(日本電気協会―耐震設計技術指針)．

一般に，機器・配管系はその機能要求の一つである耐圧条件に基づいて規格強度計算などを行って主体構造体(耐圧部本体の形状，寸法，板厚など)の設計

が行われるが，その支持構造体の設計に当っては，主体構造の自重，つり荷重および支持荷重のほか，地震荷重に耐えられるようにする．しかしながらその支持構造体によって主体構造に過大な熱応力などが生じないような考慮は必要である．

機器系についてはその支持構造を，熱膨張を拘束しないように設計することが比較的容易であり，主体構造に熱膨張拘束力を直接与えないのが通例である．

概念的にみて，機器系は剛領域に入るように設計することが容易であり，またそうすることが構造上の安全率を高めることに役だっているが，配管系は剛

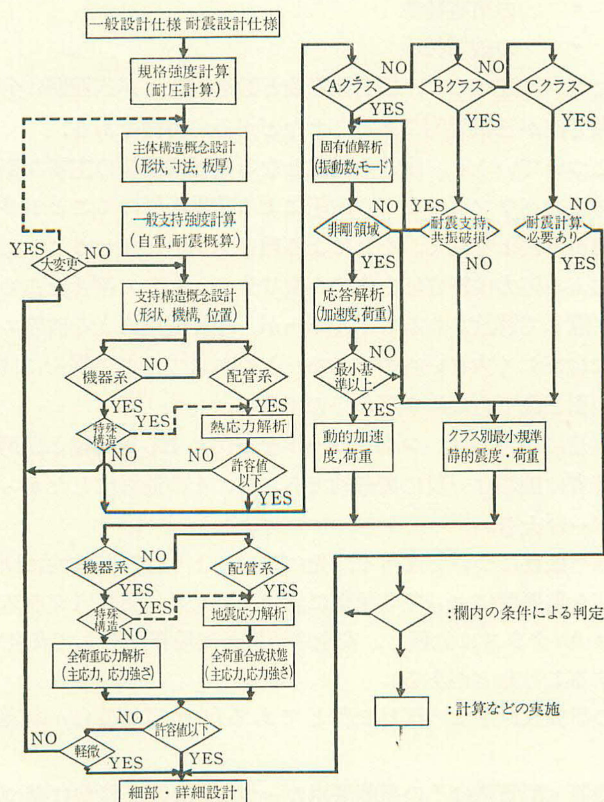


図 4.4.1　機器・配管系の耐震設計流れ線図

領域に入れると，地震応力は低減しても熱応力を高めることになり，構造上の安全率は必ずしも高められないことが多い．したがって，配管系は一次応力的地震応力と二次応力的熱応力との適当な調整がとれるような構造にしておくことが重要である．この点は機器系と配管系との支持構造概念設計におけるアプローチに本質的な差が見られる．

Aクラス，Bクラスに属する一般機器・配管類，炉内構造物に対する許容応力は以下のとおりである．

(1) 炉容器，1種管に対して

$P_m : S_m$

$P_L + P_b : 1.5\,S_m$

$P_L + P_b + Q : 3\,S_m$

(2) 炉内構造物に対して

$P_m : S$

$P_L + P_m : 1.5\,S$ と S_y のうちの小さいほうの値

$P_L P_m + Q : 3\,S$

S と S_y とは前に示したとおり，それぞれ基本許容応力度，降伏応力である．

参考文献

(1) ASME Code Section III, Boiler and Pressure Vessel Code, 1968.
(2) ASME Code Section III, Case Interpretation 1592, 1974.
(3) 村主進編：原子炉安全工学，日刊工業，昭和50年.
(4) 飯田国広：圧力容器の低サイクル疲労強度，溶接学会誌，37, 5, 1968.
(5) 日本溶接協会編：原子力構造機器の材料，設計，施工，検査に関する講習会テキスト，昭和49年.
(6) 日本電気協会編：原子力発電所耐震設計技術指針，JEAG 4601-1970.

5. 原子炉構造物の高温挙動とその解析

原子炉など高温域で使用する機器を設計するうえにおいて遭遇するもっとも困難な点は，機器要素の応力，ひずみ，変形などの構造挙動を簡単には予測しにくいということであろう．すなわち，室温領域で使用される場合には，その応力解析も通常の弾性理論やせいぜい弾塑性理論を用いて行えば一応は事足りると考えられる．ところが，高温になるとクリープ現象を代表とする複雑な非線形現象が加わってくることがよく知られている．このために高温機器の設計は一段と困難になる．

ここでは，まず原子炉における高温構造挙動について概説し，次に解析のための材料のモデル化の例を述べる．最後に有限要素法を応用した場合の簡単な解析例を説明する．

5.1 原子炉における高温構造挙動

原子炉では核反応によって熱を生じさせ，その熱を発電や推進などの動力源として利用している．そのため熱の取出しの媒体として，各種の冷却用流体を用いている．現在の発電用原子炉の主流を占めている軽水型原子炉では冷却材は軽水であり，その温度はたかだか 400°C 程度である．したがって燃料部を除いては原子炉構造物の温度は，その程度に抑えることができる．このくらいの温度では，応力が相当高く保たれていないかぎり，材料のクリープ変形が大きく生じることはないことが知られている．一方，現在のところ，世界各国で開発が進められている高速増殖炉や高温ガス炉においては，冷却材温度が 500～1 000°C 程度にもなり，構造材料のクリープ変形が無視できないほどに大きくなる．

従来，原子力機器の構造設計基準として国際的に指導的役割を果たしてきた

ASMEのBoiler and Pressure Vessel Code Section IIIによると，フェライト鋼に対して371°C(700°F)，オーステナイトステンレス鋼に対して427°C(800°F)を超える場合一応クリープ挙動を設計上考慮すべきであることが示唆されている．したがって，これ以上の温度条件を考える必要のある場合の基準としてCode Case 1331-1〜8およびこれに引き続くCode Case 1592を刊行している．これらの設計基準に織り込まれている，防止すべき原子炉機器の破損形態としては以下のようなものがある．

(1) 短期負荷による延性破壊

(2) 長期負荷によるクリープ破壊

(3) クリープ疲れの相互作用による破壊

(4) 進行性崩壊およびラチェッティングによる過大変形

(5) 過大変形による機能損失

(6) 短期負荷による座屈

(7) 長期負荷によるクリープ座屈

以上の破損形態を防止することは，高温域において

(1) クラックの発生とその伝播を防止すること

(2) 機能上問題となるような大きな変形を防止すること

の二つに要約できよう．また，この両者が連続的に生じることについても注意する必要があろう．たとえば，なんらかの要因で座屈を起こし，生じた大きなひずみによってクラックの発生や伝播をひき起こすことなどは可能な複合破損形態と考えられる．

さて，上述したような原子炉機器の破損防止という設計への要求を方法論という観点から考えた場合，大まかに分類して簡易解析法と詳細解析法との二つが現状ではその基本となっている．このいずれかの方法で解析された変形あるいはひずみの値を，別に求められた材料の許容値と比較して，機器の破損を防止するための設計を行うというのが設計の基本的な手順である．上に述べた二つの解析手法の特徴をまとめると表**5.1.1**のようになろう．また，クリープ効果を無視できる通常の構造設計法と，クリープ効果が重要となる高温構造設計法とを比較すると表**5.1.2**のようになる．

この両表を参照してみると，両解析手法ともそれぞれに特質があることがわかる．すなわち，簡易解析法はその理論的背景や構造のモデルという点に理論的な難点はあるが，解析そのものの準備や計算のためのコストが少なくて済む

表 5.1.1 簡易解析法と詳細解析法との比較

	簡易解析法	詳細解析法
解析対象の形状モデル	単純なモデル	現実に近いモデル
弾塑性域における応力-ひずみ関係	剛-完全塑性体あるいは弾-完全塑性体など	バイリニア，マルチリニアあるいは曲線近似
使用する塑性理論	変形理論	流れ理論
ひずみ-変位関係	微小理論	有限理論
必要な計算コスト	α 円	10α 円以上

表 5.1.2 通常の構造設計法と高温構造設計法との比較*

		通常の構造設計法（クリープ効果なし）	高温構造設計法（クリープ効果あり）
適用例		軽水炉	高速炉，高温ガス炉
使用温度		ステンレス鋼 426°C 以下 フェライト鋼 372°C 以下	476°C 以上 372°C 以上
構造物の変形		弾性変形（一部塑性）	弾性クリープ変形（同左）
設計基準		通産省令 501 号 ASME コード Sec. III	ASME コード Case 1592～1596 など
簡易解析法		かなり充実	不十分
詳細解析法	手法	有限要素法による弾性解析	有限要素法による弾・塑性クリープ解析
詳細解析法	手法の信頼性	かなり十分	やや不十分
詳細解析法	コスト	5 万円～50 万円 （軸対称構造 1 題の解析費）	50 万円～500 万円 （同左）
今後の課題		簡易法の充実	簡易法の充実，詳細解析法の確立

* 山田嘉昭編：非弾性解析プログラムの調査と試用，日本機械学会，1974.

という便宜さがある．一方，詳細解析法はその理論的背景は現実に可能なもののうちでほぼ最高水準に近いものを適用することができ，また構造のモデル化という点でもかなり現実的なものまでシミュレートすることができるが，計算コストの面が大きな難点と考えられる．したがって，設計の点から考えて，各種のパラメータサーベイが要求される基本設計の段階では前者を活用し，最終詳細設計段階で後者をしだいに用いてゆくという二段階法が有効であろう．また，前者の妥当性を後者によって確認することも重要である．なお，前者は一般に安全側すぎる結果を与えることがあり，場合によっては設計が不可能となることもあり得る．このような場合は，後者によって再チェックを行い，妥当な設計が可能となることも多い．

さて，以上では高温形原子力機器の設計に当たっては，かなりの部分に解析的な要素が含まれることを述べた．この場合，特に詳細解析法において，いかなる構成方程式を材料挙動として使用するかという点がきわめて重要なポイントとなる．逆にいうとすれば，いかに高級な電子計算機プログラムが完備されたとしても，入力となるべき材料の構成方程式が実際の材料挙動をうまく表していなければ，得られた解析結果はほとんど意味をなさないことになろう．しかしながら，原子力機器を除く一般の高温形機器の設計においては，従来それほど解析的な面が強調されていなかったようであるし，また解析手法そのものもそれほど進歩してはいなかった．このような事情から，材料の構成方程式の重要性を材料の供給側と機器の設計側との両者ともにそれほど認識してはいなかったというのが実情であろう．

一方，アメリカでは，高速炉や高温ガス炉の設計に際して，予想される温度と荷重条件下での構造物の健全性を証明するために，有限要素法による詳細非弾性構造解析法を適用することに踏み切った．特に，高速炉開発の国家機関の一つである ORNL(Oak Ridge National Laboratory) においては，詳細非弾性解析法の確立を目的として 1971 年ごろから活発な研究を行っているが，その一環として材料の構成方程式の研究を，代表的な材料である SUS 304 などについて開始した．その成果が章末の文献 1 にまとめられており，以下の二つの節ではその概要を紹介する．

5.2　時間に依存しない非弾性挙動

ここでは時間に依存しない非弾性挙動(弾塑性挙動)の構成方程式についての議論を行う．

一般に材料の弾塑性挙動を表すにはフックの法則のほかに (1) 降伏条件，(2) 流れ法則，(3) 硬化法則の三つの構成要素が必要である．降伏条件としてはミーゼス (Mises) およびトレスカ (Tresca) の二つの降伏条件があるが，ここでは前者を用い，流れ法則としてはミーゼスの関連流れ法則を採用する．また硬化法則としては，等方硬化および移動硬化の二つの硬化法則が通常使用される．等方硬化によると負荷曲面は応力軸の原点に対してその形と位置を保ったまま塑性流動の間，膨張してゆく．

この法則は単調負荷の場合は使用できるが，繰返し負荷に対しては誤った結

果を与える．このような負荷に対してはプラーガ(Prager)*により提案され，後にジーグラ(Ziegler)**によって修正された移動硬化法則を用いるとよい．この法則は負荷曲面は剛であり，移動するということを仮定している．ORNL では繰返し負荷に対する硬化の特徴を取り入れた移動硬化法則を推奨している．

* W. Prager · "A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids", J. Appl. Mech., **23**, 1956, pp. 493–496.

** H. Ziegler : "A modification of Prager's hardening rule", Quart. Appl. Math., **17**, 1959, pp. 55–65.

5.2.1 等方硬化と移動硬化

実験から得られる繰返し負荷に対する応力－ひずみ曲線を調べると，弾性域の広さは塑性流動に影響されない(すなわち負荷曲面は剛である)ことがわかる．それゆえ移動硬化法則のほうが等方硬化法則より適切であるといえる．しかし，最初の単調負荷に対しては等方硬化を使用することができるので，ここではこれら二つの硬化法則を議論することにする．

以下の議論においては次式のようなミーゼス(Mises)形の流れ法則を用いる．

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p} \sim \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{5.2.1}$$

ここに $\varepsilon_{ij}{}^{p}$ は塑性ひずみ，σ_{ij} は応力，f は降伏関数であり塑性ポテンシャル関数として用いられる．ここでは塑性ポテンシャル関数としてミーゼスの降伏関数を用いる．

(1) 等方硬化モデル　このモデルは塑性変形が生じている間，負荷曲面がその中心を最初の状態に保ったまま膨張してゆくものであり，この曲面を表す式は次のようになる．

$$f(\sigma_{ij}) = \kappa \tag{5.2.2}$$

このモデルでは，塑性変形履歴は負荷曲面の寸法を決める κ に含まれる．すなわち，κ は

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}{}^{p} \tag{5.2.3}$$

で与えられる塑性仕事 W，あるいは

$$d\varepsilon^{p} = \left(\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}{}^{p} d\varepsilon_{ij}{}^{p}\right)^{1/2} \tag{5.2.4}$$

の積分として定義される相当塑性ひずみの関数となる．f としてミーゼスの降

伏関数を考えると，

$$f=\frac{1}{2}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'=\kappa(d\bar{\varepsilon}^{p}) \tag{5.2.5}$$

ここに σ_{ij}' は偏差応力である．(5.2.5)は

$$\bar{\sigma}=\left(\frac{3}{2}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'\right)^{1/2} \tag{5.2.6}$$

で定義される相当応力 $\bar{\sigma}$ を用いると次のようになる．

$$\bar{\sigma}=\left[3\kappa\left(\int d\bar{\varepsilon}^{p}\right)\right]^{1/2}=F(\bar{\varepsilon}^{p}) \tag{5.2.7}$$

いま，単軸状態を考える($\sigma_{11}\neq 0$)と，$\bar{\sigma}=\sigma_{11}$，および $d\bar{\varepsilon}^{p}=d\varepsilon_{11}{}^{p}$ であるので(5.2.7)から相当応力－相当塑性ひずみ曲線として単軸の応力－塑性ひずみ曲線を用いればよいことがわかる．

(2) **移動硬化モデル**　　これは負荷曲面が塑性変形中，その寸法を一定に保ったまま応力空間を移動するというモデルである．等温条件下で負荷曲面 f は一般に次のように与えられる．

$$f(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}{}^{p},H)=\kappa \tag{5.2.8}$$

また初期降伏曲面は

$$f(\sigma_{ij})=\kappa_0 \tag{5.2.9}$$

で与えられる．(5.2.8)で κ は等方硬化の場合と異なって定数であり，履歴は関数 H に含まれることとなる．この関数 H を決定することが非線形移動硬化理論の中心的な課題であるが，この H を与える理論はいまのところ固まっているといえないので，バイリニア(bilinear)な応力－ひずみ関係を用いる古典的な移動硬化理論を使用することが推奨される．この場合，負荷曲面 f は次式のように与えられる．

$$f=\frac{1}{2}(\sigma_{ij}'-\alpha_{ij})(\sigma_{ij}'-\alpha_{ij})=\kappa=\text{一定} \tag{5.2.10}$$

ここに α_{ij} は負荷曲面の全移動を表すテンソルであり，

$$d\alpha_{ij}=Cd\varepsilon_{ij}{}^{p} \tag{5.2.11}$$

で与えられる．(5.2.11)で C は材料定数であり，バイリニアな応力－塑性ひずみ線図の傾きと関係づけられる．(5.2.11)を(5.2.10)に代入し(5.2.6)で与えられる相当応力，および

$$(\bar{\varepsilon}_1{}^{p})^2=\frac{4}{3}I_2=\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}{}^{p}\varepsilon_{ij}{}^{p}\left(I_2=\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}{}^{p}\varepsilon_{ij}{}^{p}:\varepsilon_{ij}{}^{p}\text{ の第 2 不変量}\right) \tag{5.2.12}$$

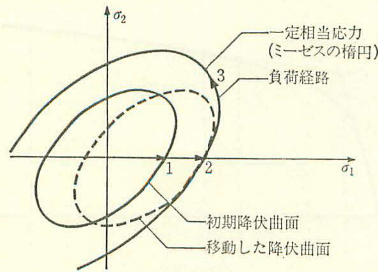


図 5.2.1 移動硬化の負荷曲面と一定相当応力曲面との比較

で与えられる相当塑性ひずみを用いると f は結局次のようになる.

$$f=\frac{1}{3}\left[\bar{\sigma}^2-3\alpha_{ij}\sigma_{ij}'+\left(\frac{3}{2}C\bar{\varepsilon}_1{}^p\right)^2\right]=\kappa \tag{5.2.13}$$

この式は，等方硬化の場合の相当応力－相当塑性ひずみ関係を移動硬化に対しては適用できないことを示している．このことを図 **5.2.1** で考えてみる．この図は単軸負荷 σ_1 を 1 点から 2 点に負荷したときの二次元応力空間でのミーゼス形の負荷曲面の動きを示す．この負荷は初期降伏面を越えるので，等方硬化および移動硬化の負荷曲面はそれぞれ図に示すように移動する．次に相当応力が一定である曲面上での点 2 から点 3 への負荷を考える．等方硬化の場合の相当応力－相当塑性ひずみ関係式は，この負荷経路に沿っては塑性ひずみは変化しないことを示している．一方，移動硬化の場合は，この負荷経路は点 2 の負荷によって作られた移動硬化の負荷曲面の外側に出ることになり，付加的な塑性ひずみが生じることになる．以上から移動硬化の場合は相当塑性ひずみは相当応力により一意には決定できないことがわかる．

5.2.2 いかなる応力－ひずみ関係式を用いるか

材料の弾塑性挙動を記述するために古典的な移動硬化法則を用いることを ORNL は推奨している．古典的な移動硬化法則に含まれている材料定数 C および κ はバイリニアな単軸応力－ひずみ線図から以下のようにして決定される．

与えられた材料，温度条件に対して，使用する単軸応力－ひずみ関係のバイリニアな表示は，構造物が受ける最大ひずみに応じて選ばれる．材料定数 C は単軸試験から得られる偏差応力－塑性ひずみ線図の傾きである．C および κ の

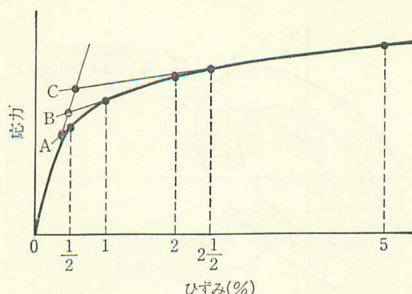


図 5.2.2　単調引張り応力-ひずみ曲線のバイリニア表示を決定する方法

値は全ひずみが1%，2%，5%の三つの場合についてそれぞれ決定される．これらの値は高速実験炉(fast flux test facility)構造要素に生じると思われる最大ひずみ，および微小ひずみ理論の適用限界などを考慮して決められたものである．

初期単調負荷の場合の応力－ひずみ曲線のバイリニアな表示を求める方法を示したのが**図 5.2.2** である．すなわち，弾性線は材料の初期応答から決定され，更に1%全ひずみに対する塑性応力－ひずみ関係は1%ひずみと0.5%ひずみの応力点を直線で結んだものであり，降伏点はこの直線と弾性線の交点Aで定義される．同様にして2%，5%全ひずみに対する降伏点B, Cがそれぞれ弾性線と2%ひずみ，1%ひずみ，および5%ひずみ，2.5%ひずみを結ぶ直線との交点から決定される．このバイリニアな応力－ひずみ線図から単調負荷の場合の C および κ が決定される．なお，降伏応力を $\sigma_{\rm yield}$ とすると κ は $\sigma_{\rm yield}=\sqrt{3}\kappa$ なる関係を用いて求められる．ORNL によって求められた SUS 304，および SUS 316 材の場合の C, κ の値を**表 5.2.1** から**表 5.2.4** に示す．

次に繰返し負荷を受ける場合を考える．繰返し負荷を受ける場合 SUS 304 材の応力－ひずみ曲線を室温の場合について**図 5.2.3** に，1 200°F の場合について**図 5.2.4** に示す．これらの図から材料は繰返し数の増加に伴い，最初は硬化し 10～20 サイクルの負荷の後，ヒステリシス・ループはほぼ安定な形状になることがわかる．また硬化の程度は高温のほうが大きい．弾性応答を示す範囲に注目すると，室温の場合は繰返しによってほとんど変化しないが，1 200°F の場合は最初の数サイクルの間はこの範囲は大きくなり，その後のサイクルでは一定になってゆくことがわかる．このことは 1 200°F の場合，負荷曲面の移動および成長が最初の数サイクルの間で見られることを示している．

表 5.2.1 高温における SUS 304 材の硬化係数

温度範囲 (°F)	平均応力－ひずみ曲線から求めた C(psi)		最小応力－ひずみ曲線から求めた C(psi)	
	2 %最大ひずみ	5 %最大ひずみ	2 %最大ひずみ	5 %最大ひずみ
$500 \leq T < 1\,000$	0.2765×10^6	0.1556×10^6	0.2778×10^6	0.1574×10^6
$1\,000 < T \leq 1\,200$	0.2155×10^6	0.1356×10^6	0.2079×10^6	0.1308×10^6

表 5.2.2 高温における SUS 316 材の硬化係数

温度範囲 (°F)	平均応力－ひずみ曲線から求めた C(psi)		最小応力－ひずみ曲線から求めた C(psi)	
	2 %最大ひずみ	5 %最大ひずみ	2 %最大ひずみ	5 %最大ひずみ
$400 \leq T < 1\,000$	0.3132×10^6	0.1762×10^6	0.3152×10^6	0.1784×10^6
$1\,000 < T \leq 1\,200$	0.2465×10^6	0.1562×10^6	0.2573×10^6	0.1617×10^6

表 5.2.3 関数 $\kappa_0(T)$ ——SUS 304 材の場合

温度範囲 (°F)	平均応力－ひずみ曲線から求めた $\kappa_0(T)$ (psi)^2		最小応力－ひずみ曲線から求めた $\kappa_0(T)$ (psi)^2	
	2 %最大ひずみ	5 %最大ひずみ	2 %最大ひずみ	5 %最大ひずみ
$500 \leq T < 1\,000$	$\frac{3}{4}(17\,960 - 5.167T)^2$	$\frac{3}{4}(20\,387 - 4.983T)^2$	$\frac{3}{4}(15\,477 - 4.324T)^2$	$\frac{3}{4}(17\,941 - 4.17T)^2$
$1\,000 < T \leq 1\,200$	$\frac{3}{4}(18\,397 - 6.59T)^2$	$\frac{3}{4}(24\,725 - 10.44T)^2$	$\frac{3}{4}(19\,222 - 8.665T)^2$	$\frac{3}{4}(28\,076 - 14.665T)^2$

表 5.2.4 関数 $\kappa_0(T)$ ——SUS 316 材の場合

温度範囲 (°F)	平均応力－ひずみ曲線から求めた $\kappa_0(T)$ (psi)^2		最小応力－ひずみ曲線から求めた $\kappa_0(T)$ (psi)^2	
	2 %最大ひずみ	5 %最大ひずみ	2 %最大ひずみ	5 %最大ひずみ
$400 \leq T < 1\,000$	$\frac{3}{4}\left(\frac{2\,189.29}{T \times 10^{-3}} + 11813\right)^2$	$\frac{3}{4}\left(\frac{2\,108.8}{T \times 10^{-3}} + 14875\right)^2$	$\frac{3}{4}\left(\frac{1\,896.14}{T \times 10^{-3}} + 10\,266\right)^2$	$\frac{3}{4}\left(\frac{1\,826.75}{T \times 10^{-3}} + 13\,323\right)^2$
$1\,000 < T \leq 1\,200$	$\frac{3}{4}(11\,624)^2$	$\frac{3}{4}(13\,542)^2$	$\frac{3}{4}(9\,747)^2$	$\frac{3}{4}(11\,784)^2$

更にクリープ変形が，引き続く弾塑性挙動に及ぼす影響を図 **5.2.5** に示す．この図は SUS 304 材に 1 200°F でクリープひずみを与えた後，室温で繰返し負荷を与えたときの挙動を表す．図から与クリープ変形は与塑性ひずみの場合と同じように材料に硬化をもたらすことがわかる．

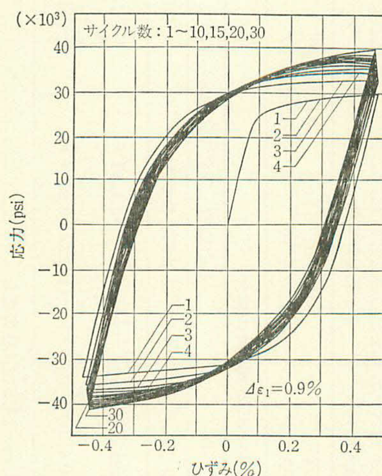


図 5.2.3　室温における SUS 304 材の繰返し応力-ひずみ挙動

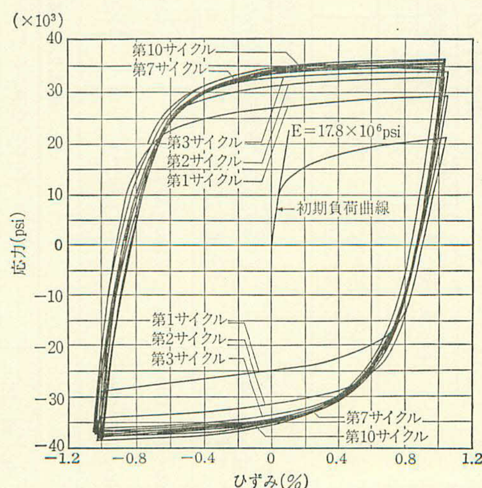


図 5.2.4　1200°F における SUS 304 材の繰返し応力-ひずみ挙動

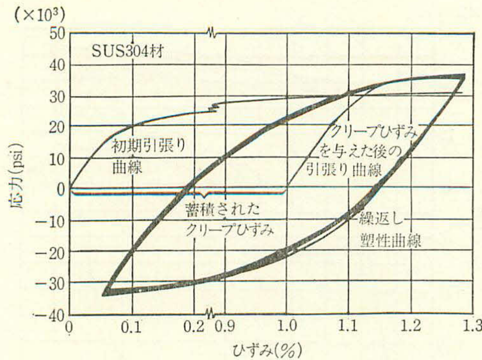


図 5.2.5 室温の場合のクリープひずみを与えた後の引張り，および繰返し挙動と処女材料の挙動との比較(SUS 304 材の場合)

以上の実験事実から次のことを解析上考慮すればよい．すなわち，最初の非弾性負荷に対しては単調負荷引張試験から得られる応力－ひずみ関係を使用してよいが，最初の非弾性負荷に引き続く負荷サイクルに対しては，硬化した材料の応力－ひずみ関係のバイリニア表示を用いなければならない．ここでは第10サイクルにおける応力－ひずみ曲線を用いることを薦めている．ここで非弾性負荷とは0.2%以上の相当塑性ひずみ，あるいは相当クリープひずみを生じるような初期負荷過程のことである．

図 5.2.6 に第10サイクルの応力－ひずみ曲線のバイリニア表示を求める方法を示す．10サイクルでの C の値は初期単調負荷の場合と同じに採る．一方，κ の値は一般には，初期単調負荷の場合の κ_0 と異なった値 κ_1 を採る．この κ_1 は図 5.2.6 に示したように弾塑性線と弾性線の交点から求められる．ここで弾塑性線はこの線と実際の応力－ひずみ曲線との間で作られる面積(図中で斜線

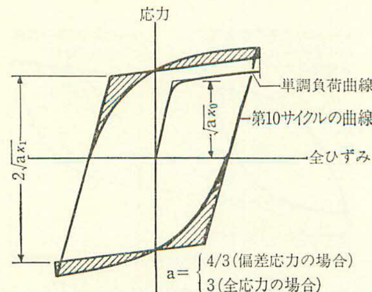


図 5.2.6 第1サイクルおよび第10サイクルの応力－ひずみ曲線のバイリニア表示

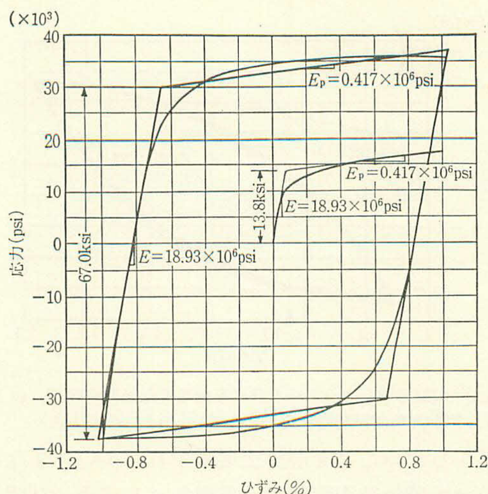


図 5.2.7　SUS 304 材(1200°F，1 %最大ひずみ)の単調負荷および第 10 サイクルの応力 - ひずみ曲線のバイリニア表示法の一例

を施した部分)が弾塑性線の上下で等しくなるように決められる.

図 5.2.7 に高温における SUS 304 材の応力 - ひずみ曲線のバイリニア表示の一例を示す.

全ひずみ範囲が大きい場合の繰返し応力 - ひずみ曲線を実験的に求めることは困難な場合が多い．この場合の曲線の推定の仕方を**図 5.2.8** に示す．すなわち，全ひずみ範囲 4 %の曲線が実験的に求められているとき，これの弾塑性線を直線的に延長することにより，全ひずみ範囲 10% の曲線を予想するのである.

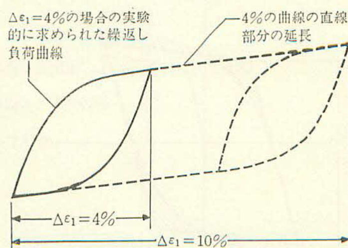


図 5.2.8　ひずみ範囲 4 %の繰返し負荷曲線からひずみ範囲 10% の場合の第 10 サイクル曲線を求める方法

5.2.3 数学的表現

以上ではバイリニアな応力－ひずみ表示を伴った古典的な移動硬化法則をミーゼスの降伏関数および関連の流れ法則とともに用いる方法を述べた．ここでは，この構成方程式の若干の数学的記述を行うことにする．

等温条件下での移動硬化法則の負荷曲面は(5.2.10)および(5.2.11)で与えられる．すなわち

$$f=\frac{1}{2}(\sigma_{ij}'-\alpha_{ij})(\sigma_{ij}'-\alpha_{ij})=\kappa=\text{一定} \tag{5.2.14}$$

および

$$d\alpha_{ij}=Cd\varepsilon_{ij}{}^{p} \tag{5.2.15}$$

一般に，負荷，中立負荷，除荷の三つの状態に対して，構成方程式は次のように書ける．

(1) **負荷**：$d\varepsilon_{ij}{}^{p}=g_{ij}\neq 0$ (5.2.16)

$$f=\kappa,\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}'}d\sigma_{ij}'>0 \tag{5.2.17}$$

(2) **中立負荷**：$d\varepsilon_{ij}{}^{p}=0$ (5.2.18)

$$f=\kappa,\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}'}d\sigma_{ij}'=0 \tag{5.2.19}$$

(3) **除荷**：$d\varepsilon_{ij}{}^{p}=0$ (5.2.20)

$$f=\kappa,\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}'}d\sigma_{ij}'<0 \tag{5.2.21}$$

ここで $d\varepsilon_{ij}{}^{p}$ は次のように与えられる．

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p}=g_{ij}=\frac{1}{C}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}'}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{\kappa l}'}\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{\kappa l}'}\right)}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}'}d\sigma_{mn}' \tag{5.2.22}$$

現在のところ移動硬化モデルは，等温条件でだけ開発されている．しかし温度変動の影響を考慮した構造物の挙動を解析するには修正が必要である．次に，このような非等温移動硬化理論の簡単な一例を示す．

非等温移動硬化に対して次式を考える．

$$f^{*}=f(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}{}^{p})-\kappa(T)=0 \tag{5.2.23}$$

ここに

$$f=\frac{1}{2}(\sigma_{ij}'-\alpha_{ij})(\sigma_{ij}'-\alpha_{ij}) \tag{5.2.24}$$

および

$$d\alpha_{ij}=Cd\varepsilon_{ij}{}^{p} \tag{5.2.25}$$

すなわち，この場合はκを温度の関数に採り，それによって温度変動の効果を取り入れるのである．

等温条件の場合と同様に負荷，中立負荷，除荷の三つの状態に対して，構成方程式は次のように書ける．

(1) 負荷：$d\varepsilon_{ij}{}^{p}=h_{ij}\neq 0$ (5.2.26)

$$f^*=0,\left(\frac{\partial f^*}{\partial\sigma_{ij}'}d\sigma_{ij}'+\frac{\partial f^*}{\partial T}dT\right)<0 \tag{5.2.27}$$

(2) 中立負荷：$d\varepsilon_{ij}{}^{p}=0$ (5.2.28)

$$f^*=0,\left(\frac{\partial f^*}{\partial\sigma_{ij}'}d\sigma_{ij}'+\frac{\partial f^*}{\partial T}dT\right)=0 \tag{5.2.29}$$

(3) 除荷：$d\varepsilon_{ij}{}^{p}=0$ (5.2.30)

$$f^*=0,\left(\frac{\partial f^*}{\partial\sigma_{ij}'}d\sigma_{ij}'+\frac{\partial f^*}{\partial T}dT\right)<0 \tag{5.2.31}$$

ここで $d\varepsilon_{ij}{}^{p}\neq 0$ は次のように求められている．

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p}=h_{ij}=\frac{1}{C}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}'}}{\left(\dfrac{\partial f^*}{\partial\sigma_{kl}'}\dfrac{\partial f^*}{\partial\sigma_{kl}'}\right)}\left(\frac{\partial f^*}{\partial\sigma_{mn}'}d\sigma_{mn}'+\frac{\partial f^*}{\partial T}dT\right) \tag{5.2.32}$$

5.3 時間に依存する非弾性挙動

ここでは時間に依存する非弾性挙動(クリープ挙動)の構成方程式について述べる．

一般に材料のクリープ挙動を表すのは，一定温度・一定引張応力下の単軸クリープ式であり，解析においては

a) クリープ式の応力項と時間項とは分割できる．

b) 応力項は温度と応力との寄与に分割される．

ことを考慮し，更に温度および応力の変動する実際の場に適用するために，以下の仮定のどちらかが必要となる．

(1) 材料の応答は現時点での状態に依存し，履歴効果は暗に含まれる．

(2) 材料は応力履歴を記憶し，その応答は履歴によって変化する

クリープ解析において，前者のように履歴を全クリープひずみ量として評価する方法を状態方程式法(equation-of-state method)といい，後者のように履歴を直接評価する方法を記憶理論(memory theory)に基づく手法という.

5.3.1 状態方程式法と記憶理論法

記憶法では，ボルツマン(Boltzmann)の重ね合せ原理とボルテラ(Volterra)の材料履歴表現とをもとに，一定応力下で求められたクリープ式から，応力変動場におけるクリープひずみが応力の非線形・連続な汎関数として表される.すなわち

$$\varepsilon(t) = F\overset{\tau=t}{[\sigma(\tau)]} \tag{5.3.1}$$

これを積分展開すると，記憶法の硬化則が得られる．すなわち

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) = &\int_{-\infty}^{t} J_1(t-\tau_1)\frac{d\sigma(\tau_1)}{d\tau_1}d\tau_1 \\ &+\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} J_2(t-\tau_1;t-\tau_2)\frac{d\sigma(\tau_1)}{d\tau_1}\frac{d\sigma(\tau_2)}{d\tau_2}d\tau_1 d\tau_2 \\ &+\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} J_3(t-\tau_1;t-\tau_2;t-\tau_3) \\ &\times\frac{d\sigma(\tau_1)}{d\tau_1}\frac{d\sigma(\tau_2)}{d\tau_2}\frac{d\sigma(\tau_2)}{d\tau_3}d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

しかし，一般には，J_n を求める n 段クリープ実験が不可能であり，解析も多重積分など困難が多いので，一項近似で，クリープ・コンプライアンス J を用いて，

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} J(\sigma, t-\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{5.3.3}$$

で近似するか，移動係数 ϕ を導入して(5.3.2)の2項まで取り入れ，以下のように表す.

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} J[\xi(t)-\xi(\tau)]\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{5.3.4}$$

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t}\phi[\sigma(\tau)]d\tau \tag{5.3.5}$$

これ以上の精度を求めるには，上記の理論は実験的にも理論的にもかなり複雑となる.

次に状態方程式について述べる．この場合，次の三つの構成要素が必要である．

a) 一定引張応力等温単軸クリープ則

b) 流れ法則

c) 硬化法則

クリープ式は圧縮応力に対しても当てはまるとして，後述するSUS 304および316材用のブラックバーン(Blackburn)のクリープ式を用い，流れ法則としてはミーゼスの流れ法則を採用する．また硬化法則としては時間硬化則およびひずみ硬化則があるが，**図5.3.1**のように応力変化に対する応答がひずみ硬化則のほうが大きく，実験値ともしばしば一致することが多く，ここでは，ひずみ硬化則を推薦する．

ひずみ硬化則を用いた状態方程式法は，次の四つの前提に基づいている．これらは，

a)等方性，b)非圧縮性，c)静水圧に無関係である．d)クリープひずみ速度は偏差応力に比例する．すなわち，

$$\dot{\varepsilon}_{ij}{}^{c} = \lambda \sigma_{ij}{}' \qquad (5.3.6)$$

ここに $\varepsilon_{ij}{}^{c}$ はクリープひずみ，$\sigma_{ij}{}'$ は偏差応力，λ は時間 t，温度 T，ひずみおよび応力の不変量のスカラ関数である．したがって，相当応力 $\bar{\sigma}$，相当クリープひずみ $\bar{\varepsilon}^{c}$ を用いて，(5.3.6)は，

$$\dot{\varepsilon}_{ij}{}^{c} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}(\bar{\sigma}, t, T)}{\bar{\sigma}}\sigma_{ij}{}' \qquad (5.3.7)$$

となり，ひずみ硬化則であれば(5.3.7)の t を消去して，

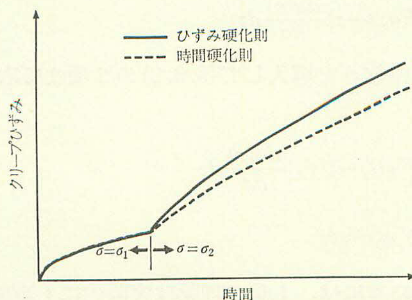


図5.3.1　変動荷重下での時間硬化則とひずみ硬化則の挙動の比較($\sigma_1 < \sigma_2$)

$$\dot{\varepsilon}_{ij}{}^c = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}, T)}{\bar{\sigma}}\sigma_{ij}{}' \qquad (5.3.8)$$

と書ける．(5.3.8)は後述する応力の繰返しがなければ，修正せずに多軸でのクリープ式を与える．

5.3.2 SUS 304 および SUS 316 材のためのブラックバーン形クリープひずみ式

軟鋼や Cr–Mo 鋼に対しては，ノルトン(Norton)則あるいはノルトン－ベイリー(Norton–Bailey)則がしばしば用いられる．すなわち，この場合のクリープひずみは

$$\varepsilon^c = A(T)\sigma^n t^m \qquad (5.3.9)$$

であり，上式にひずみ硬化則を適用すると，クリープひずみ速度は

$$\dot{\varepsilon}^c = mA(T)^{(1/m)}\sigma^{(n/m)}\varepsilon^{c[(m-1)/m]} \qquad (5.3.10)$$

となる．一方，SUS 304 あるいは SUS 316 材に対しては

$$\varepsilon^c = f(\sigma, T)[1-e^{-r(\sigma,T)t}]+g(\sigma, T)t \qquad (5.3.11)$$

という形のクリープひずみ式が推奨されている．上式の右辺は，第1項，第2項がそれぞれ一次クリープと二次クリープを表している．このような形のクリープひずみ式をブラックバーン(Blackburn)形クリープひずみ式と呼ぶことがある．さて，(5.3.11)から，ひずみ硬化則を用いてクリープ速度を直接的に求めることは不可能である．というのは，(5.3.9)から(5.3.10)への変換のように時間項を簡単に消去することができないからである．したがって，(5.3.11)をいかに処理するかで，ひずみ硬化則は一次クリープひずみ法と全クリープひずみ法に分かれる．前者は，一次クリープ速度が二次クリープ速度より支配的であるとの前提の下に時間 t を消去する方法で，閉じた形でクリープひずみ速度 $\dot{\varepsilon}^c$ が求まる．すなわち(5.3.11)の例では

$$\dot{\varepsilon}_{ij}{}^c = \frac{3}{2}[\dot{\varepsilon}^t(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^t, T)+g(\bar{\sigma}, T)]\frac{\sigma_{ij}{}'}{\bar{\sigma}} \qquad (5.3.12)$$

あるいは

$$\dot{\varepsilon}_{ij}{}^c = \frac{3}{2}[r(\bar{\sigma}, T)\{f(\bar{\sigma}, T)-\bar{\varepsilon}^t\}+g(\bar{\sigma}, T)]\frac{\sigma_{ij}{}'}{\bar{\sigma}} \qquad (5.3.13)$$

ここに $\bar{\varepsilon}^t$ は一次クリープ項を表す．

後者は，(5.3.11)とその微分から，数値計算(ニュートン・ラプソン法など

が考えられる)によって t を消去するので，一次クリープひずみ項が二つ以上の項で表される複雑な形のクリープ式であっても，$\dot{\varepsilon}_{ij}{}^{c}$ が求まる．以下にニュートン・ラプソン法による計算手法を示す．

最初に $y(t)$ および $\dot{y}(t)$ を以下のように定義する．

$$y(t) \equiv f(\sigma, T)[1-e^{-r(\sigma,T)t}]+g(\sigma, T)t-\varepsilon^{c} = 0 \qquad (5.3.14)$$

$$\dot{\varepsilon}^{c} = \dot{y}(t) \equiv r(\sigma, T)f(\sigma, T)e^{-r(\sigma,T)t}+g(\sigma, T) \qquad (5.3.15)$$

いま t^{*} を仮想時刻(pseudo time)とすると，$t^{*}=0$ を初期値として(5.3.14)を満足する t を求め，これを $\dot{y}(t)$ に代入してクリープひずみ速度 $\dot{\varepsilon}^{c}$ が得られる．ここで t は

$$t^{*} = t^{*}-y\Big/\left(\frac{dy}{dt}\right)\Big|_{t=t^{*}} \qquad (5.3.16)$$

を用いて繰返し法で求める．

両者はほとんど同一の結果を与えると思われるが，SUS 304 鋼材のクリープデータを代入して計算をし，実験値と比較すると，両者の同一性や差違などが明確になろう．すなわち，

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= 3.476\times10^{-4}\exp(0.2081\sigma) \\ r(\sigma) &= 3.991\times10^{-5}\sigma^{2.094} \\ g(\sigma) &= 1.02\times10^{-11}\exp(0.743\sigma) \end{aligned} \qquad (5.3.17)$$

ただし $8 \leq \sigma \leq 25$[ksi]

を考えると**図 5.3.2** に見るように両者は最終荷重を除いてほぼ一致するが，**図 5.3.3** のように二次クリープが支配的になると，ε^{c} を ε^{t} で置き換えることがむずかしくなって両者に差が生じてくる．また**図 5.3.4** では，全クリープひずみ

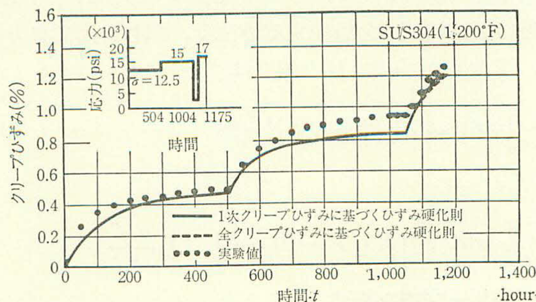


図 5.3.2　ひずみ硬化則による計算値と実験値との比較(1)

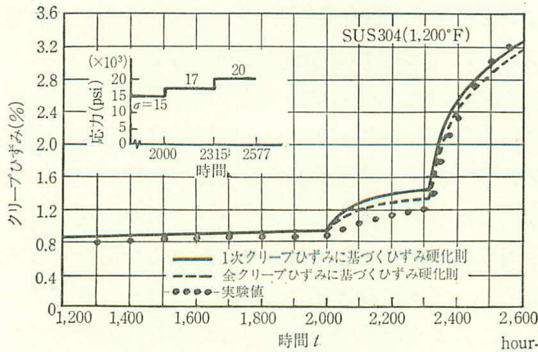


図 5.3.3 ひずみ硬化則による計算値と実験値との比較(2)

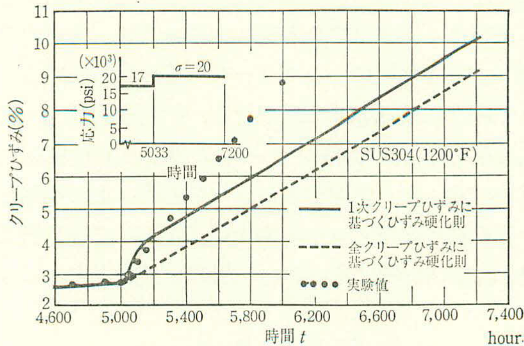


図 5.3.4 ひずみ硬化則による計算値と実験値との比較(3)

法によるとクリープひずみは応力変動後すぐに定常となるが，一次クリープ法ではしばらく一次クリープ項が関連している．しかし両者とも実験値と食違っているのは，応力がきわめて高いために材料が応力変動後すぐに三次クリープ領域での挙動をしたためと考えられる．

5.3.3 応力の反転がある場合

さて(5.3.11)式を用いる際に数値計算上問題となるのは，引張状態から圧縮状態への繰返し応力(両振り)の場合である．いま引張応力σ_1から圧縮応力$-\sigma_2$(ただし$|\sigma_1|>|\sigma_2|$)に階段状に応力が変化すると，(5.3.13)で引張り側で蓄積したクリープひずみ$\bar{\varepsilon}^t$のために，応力変動後$f(\bar{\sigma}, T)-\bar{\varepsilon}^t$はすぐ負となり，たとえば(5.3.13)による$\dot{\varepsilon}_{11}{}^t$は，$\sigma_{11}{}'$が負になっても正の一次クリープひずみ

速度を与えるという誤った結果を導く．したがってこのような繰返しのある場合の硬化則についてはなんらかの考慮が必要である．

あるいは，応力反転のある場合に従来のひずみ硬化則をそのまま用いると，引張応力状態で蓄積されたクリープひずみは圧縮応力下でも引継がれ，引張側が二次クリープ状態にあると，圧縮側でも反転後二次クリープ状態から解析が進むことになる．また時間増分法を用いた解析の場合，圧縮側の相当クリープひずみは増分を追うごとに減少し，いったんゼロになった後は増加し始める．同じ傾向は相当クリープひずみ速度にも現れ，増加した後減少するという時間応答が得られる．このような矛盾を解消するための比較的容易でプログラム上も簡単な方法が，ここで述べる改良形ひずみ硬化則である．

まず応力反転のない場合は，ひずみ硬化則をそのまま適用でき，図で示すと**図 5.3.5** のようになる．上図は応力履歴，中程の図は一定応力下の単軸クリープ曲線，下図はひずみ硬化則によるクリープ応答を表している．

応力反転のある場合は**図 5.3.6** で示される．初期引張応力 σ_3 によって全クリープひずみ ε_1 が蓄積され，時刻 t_1 で $-\sigma_1$ に応力が反転すると引張り側の蓄積硬化量 ε_1 がすべて失われ，圧縮下のクリープ応答はまだ履歴を受けていない試験片の応答と同様に硬化量ゼロから始まる．時刻 t_2 に再び引張状態に反転すると，前に蓄積されていた硬化量 ε_1 のため複雑な事態が生じてくる．つまり圧

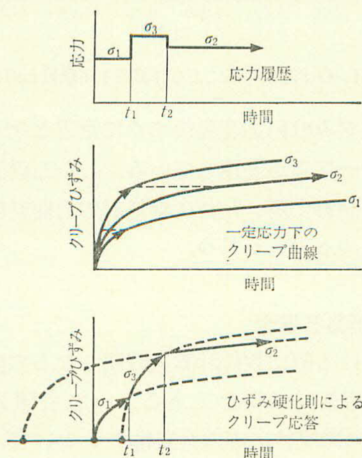


図 5.3.5　繰返し応力のない場合のひずみ硬化則による単軸クリープ応答
全クリープひずみの場合

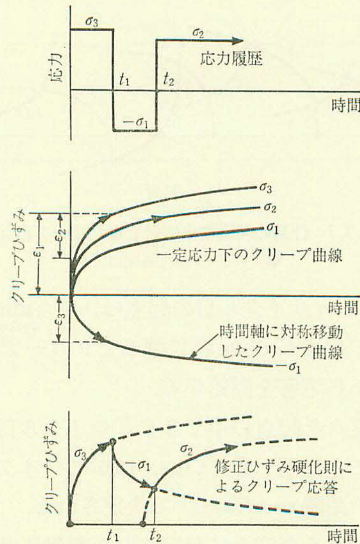


図 5.3.6 繰返し応力を含む場合のひずみ硬化則による仮想的な単軸クリープ応答
全クリープひずみの場合

縮応力による全クリープ ε_2 が ε_1 より小さければ，$\varepsilon_1-\varepsilon_2$ という硬化が引張り側に残り，ε_2 が ε_1 より大きければすべての硬化は消えて，σ_2 のクリープ曲線はひずみゼロから始まる．同様な事情は圧縮側のひずみ ε_3 と ε_2 の関係にも当てはまる．

以上の考察をもとにして，単軸クリープ挙動法則を表すと，

$$\dot{\varepsilon}^c = f(\varepsilon^H, \sigma, T) \tag{5.3.18}$$

となる．従来のひずみ硬化則と同じクリープ曲線 f を用いてはいるが，硬化量を以下の条件に基づいて，ε^t あるいは ε^c ではなく ε^H で定義し直す点に特長がある．

(1) **図 5.3.7** に示されるように各時点において，ε^+(負の性質)，ε^-(正の性質)の起点が存在する．

(2) 初期条件は $\varepsilon^+=\varepsilon^-=0$ である．

(3) ε を現時点でのクリープひずみとすると
正の応力に対して，　$\varepsilon^H = \varepsilon-\varepsilon^+$
負の応力に対して，　$\varepsilon^H = \varepsilon-\varepsilon^-$　となる．

(4) 任意の繰返し応力に対して，n サイクル目のひずみを ε_n，初期クリー

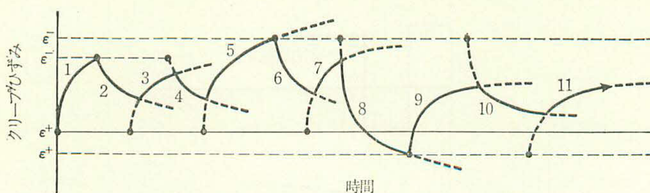


図 5.3.7　任意の荷重変化に対するクリープ応答
●：クリープひずみ起点

プを $\varepsilon_0=0$ とすると，n サイクル目の起点は，$\varepsilon^+=\min_{t=0,n}\varepsilon_t$，$\varepsilon^-=\max_{t=0,n}\varepsilon_t$ で与えられる．つまり，起点が ε^- か ε^+ に移るとクリープ曲線もその新しい起点に移り，その値から応答を開始する．

ここで，図 5.3.7 を見ると起点の中で 2, 6, 9 サイクル目の起点はひずみの上・下限を規定するので主繰返し点といい，ほかのサイクルの起点は中間値であり，主繰返し点からの距離 $\varepsilon-\varepsilon^+$, $\varepsilon-\varepsilon^-$ で決定される．

上記の議論は，以下のような完全に仮定された挙動に基づいている．すなわち，

(1) 引張状態と圧縮状態でのクリープ曲線は一致する

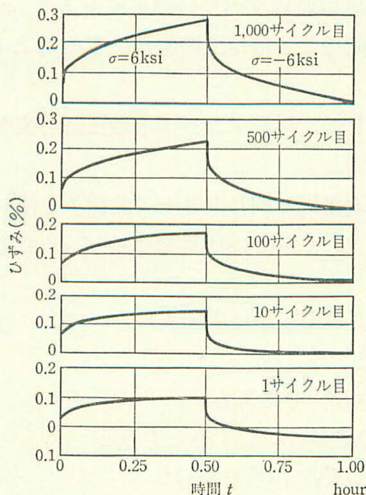


図 5.3.8　一定応力振幅でのクリープひずみの時間変化
インコネル，$T=1\,500$°F

(2) 応力変動値の等しい繰返し荷重をうける前後のクリープ応答は基本的に同等である

(1)の前提はかなり一般性があるにしても，(2)については異論もあり，アルミニウム合金で，引張状態で予クリープひずみを受けた後の圧縮下のクリープ応答は，履歴を受けない材料の場合よりやや大きいことが知られている．しかし，インコネルの実験値は(2)を支持している．**図 5.3.8** で，サイクル数が増すごとに材料の軟化がクリープによって進んでいることがわかり，その傾向は，高温で比較的低サイクルである限り保証される．だが SUS 304 鋼材に対する実験値はまだ不十分で，実験的確証は十分得られていないのが実情である．

5.4　有限要素法による厚肉円筒のクリープ解析例

ここでは，軸対称・平面ひずみ状態下の厚肉円筒のクリープ解析例を示し，数値計算上の問題を述べる．**図 5.4.1** に計算モデルの要素板厚方向分割法を示す．平面ひずみ状態を仮定しているため，円筒の長さ方向(z 方向)の変形を全節点で拘束することになる．

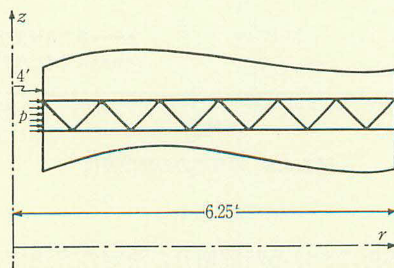


図 5.4.1　厚肉円筒

外径：6.25 inch，内径：4 inch

5.4.1　一定圧力の場合

図 5.4.2 はノルトン形のクリープ構成方程式 $\varepsilon^c=6.4\cdot10^{-18}\cdot\sigma^{4.4}\cdot t$($\sigma$ は応力 psi, t は時間 hr)を用いた場合の相当応力 $\bar{\sigma}$ の時間変化を表した図で，厳密解によく収束している．**図 5.4.3** は，ベイリイ・ノルトン形のクリープ構成方程式 $\varepsilon^c=6.4\cdot10^{-18}\cdot\sigma^{4.4}\cdot t^{0.7}$ を用いた計算例である．図 5.4.2 と異なり，t のべき乗の項のために，時間硬化とひずみ硬化の両モデルによって相当応力の時間変化

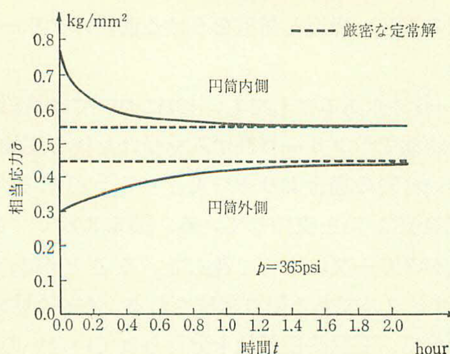


図5.4.2　相当応力の時間変化

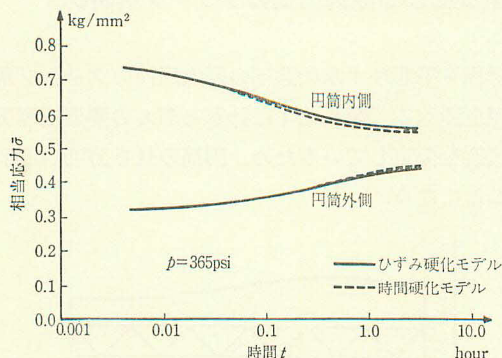


図5.4.3　相当応力の時間変化

に相違が見られる．

ここで，クリープ解析における時間増分の決定の方法で，ラシド(Rashid)* の提案した式 $\Delta\varepsilon^c=\kappa(\bar{\sigma}/E)$ を使用した場合，パラメータ κ がどの程度の値ならば，クリープひずみ曲線が安定して得られるかの数値実験の結果を示そう．図**5.4.4**に示すように，ラシド(Rashid)の述べているとおり κ が0.1以下になるように採れば，ゆらぎもなく一応よい結果が得られることがわかった．なお，本図には示していないが，0.1以上の κ を用いた場合，時間増分が大きくなりすぎて，数値的な振動を生ずることが確認されている．

* Y. R. Rashid : Analysis of multiaxial flow under variable load and temperature, Proc. of Int. Conf. on Creep and Fatigue in Elevated Temperature Applications, C-183, 1973.

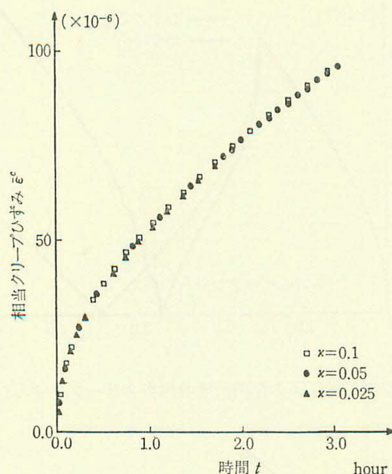


図 5.4.4 円筒内面でのクリープひずみ
ひずみ硬化モデル

5.4.2 変動圧力の場合

次に，変動圧力の極端な例として，内圧が正の一定値から負の一定値にある時刻で逆転する場合を考えよう．

最初に 5.3 節で述べた，応力反転の場合の考慮をせずに，ベイリイ・ノルトン形のクリープ構成方程式を使ってひずみ硬化モデルで解析を行うと，**図 5.4.5**, **図 5.4.6** のように，相当応力および相当クリープひずみの時間変化が不自

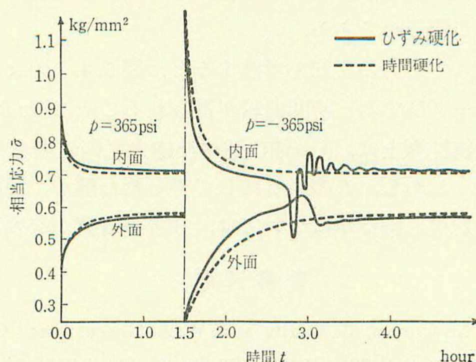


図 5.4.5 繰返し内圧下の厚肉円筒の相当応力時間変化

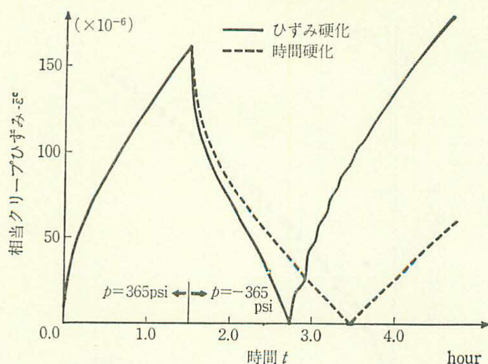


図 5.4.6　繰返し内圧下の厚肉円筒の相当クリープひずみ(円筒内面)

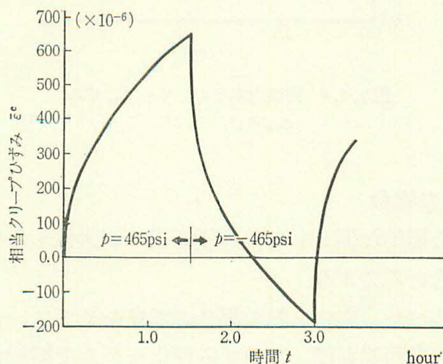


図 5.4.7　繰返し内圧下の厚肉円筒の相当クリープひずみ(円筒内面)
図 5.4.5 および図 5.4.6 とは圧力値が異なっていることに注意

然に振動することが明らかである.

次に 5.3 節に従って応力の反転を考慮すると，**図 5.4.7** のように振動は解消して，安定なクリープひずみ－時間曲線が得られることがわかる．このように，少なくとも数値計算上は，5.3 節に述べた応力反転の場合のクリープ解析手法は有効である．しかし，このようにして得られた解が，実際の機器の挙動をどの程度正確に表現し得るかについては，今後の研究が必要である.

参 考 文 献

(1) C. E. Pugh, J. M. Corum, K. C. Liu and W. L. Greenstreet : Currently recommended constitutive equations for inelastic design analysis of FFTF components, ORNL-TM-3602, 1971.

6. 原子炉構造物の製造

原子炉構造物の製造について述べる場合，使用実績の最も多い軽水炉を想定して記述するのが妥当である．

ここでいう製造とは，材料選定，溶接施工，組立といった工程を意味する．使用目的に合致した材料を選ぶのが材料選定であって，溶接性能とか破壊靭性や耐食性などを考慮して決められる．原子炉構造物は，圧力容器についていうと，板厚がきわめて大きく(BWR で約 150 mm，PWR で約 200 mm)，その溶接は通常の鋼構造物の溶接と違ってむずかしいのが普通である．そのために，新しい溶接法の開発が現在でも試みられている．原子炉圧力容器の製作のためにはいうまでもなく溶接工程が不可欠であるが，板材を熱間加工して必要な形状に変形させたり，あるいは鍛造によってある部分は製作されたりする．本章ではそれらについて記述する．

6.1 構造材料の選定

6.1.1 選定条件

圧力容器用材料を決定するとき考慮しなければならない要素は次のとおりであろう．

(1) 使用目的に適していること．

(2) 適用されるべき規格の要求項目を満足していること．

(3) 価格が廉価であること．

(4) 製造可能でかつ期日内に入手可能であること．

設計者が材料を選定するときには，これらの要素は設計条件に制約を与えることになるので，絶えず念頭においておく必要がある．

材料の合目的性については，耐食性と温度の諸特性に及ぼす影響などを考慮する．ASME Code Section III によれば，腐食や機械的摩損によって生ずる板厚減少は，設計段階で評価して減少量を見込んだ板厚の板材を使用することになっている．一般に許容腐食度は，工業目的や環境の厳しさによって大きく左右されるので，用途別によって異なるのが普通である．特に化学プラント用の圧力容器の腐食量は大きいので，腐食しろを必要な量だけ見込んでおく必要がある．

原子炉構造物は高温状態で使用されるので，その材料選定に当たっては使用温度における材料強度が問題になる．**図 6.1.1** に軟鋼の引張強さ，降伏応力，クリープ強さの温度依存性を模式的に示す(1)．引張強さは温度が室温から上昇するに従って減少するが，約 150°C を過ぎると逆に増加し始め，約 250°C で最高度に達する．それ以上温度が上昇すれば，再び減少し始める．降伏強さは初め緩慢に減少するが，200°C と 300°C との間で比較的急激に減少し，300°C を過ぎると，温度依存性はほとんど見られなくなる．このような現象は軟鋼に限らず，オーステナイト系鋼についてもいえるようである．100 000 時間クリープ破断強さについては，400°C を過ぎると急激に減少する．このような高温強度の変化は金属組織学的には，窒化物の析出と関連したひずみ時効硬化によるものと考えられている．一方，材料の降伏応力は主として結晶粒度に大きく

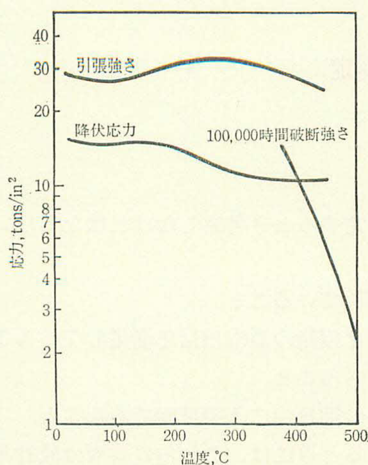


図 6.1.1　軟鋼の機械的強度の温度依存性

左右され，結晶粒度が小さくなるほど向上する．引張強さや衝撃特性についても事情は同じであって，微細な結晶粒を有する材料のほうが当然優れている．

既に述べたように，ASME Code Section III では，使用材料については設計応力が降伏応力や引張強さに基づいて決められる．クリープ温度域で使用される高温構造物の材料については，静的な機械的特性の確保はもとよりのこと，クリープ破断強さの確保をも図らなければならない．

材料選定に関して，使用材料の溶接性は常に注意を要する．母材の特性がどんなに優れていても溶接部の性能が劣っていれば，使用に価いしないし，一般に，溶接部の性能は母材に比べて劣るからである．熱影響部(HAZ＝heat affected zone)やボンド部は溶接熱によって，結晶粒が粗大化するために破壊靭性が低下する．そしてこのような溶接性は，溶接材料や溶接条件(入熱量，溶接速度など)，溶接方法(手溶接，サブマージアーク溶接，エレクトロスラグ溶接など)によって大きく左右されるので，材料の採用に当たっては，これらの点からも常に検討されなければならない．

Section III で明確に定義されているように，低サイクル疲れ強さも材料選定に際して特に考慮しなければならない要因の一つである．

6.1.2 原子炉構造材料

原子炉構造機器に使用される材料はフェライト系鋼(炭素鋼，低合金鋼)とオーステナイト系ステンレス鋼とに大別される．これらの材料を製法で分類すれば，板材・鍛造材・鋳造材・管材に分けられる．一般に，原子炉はこれらの材料を適当に加工して製作される．原子炉構造材料として広く採用されている材料の化学成分と機械的性質とを表 **6.1.1** に示す[(2)]．

原子炉建設の初期のころは，ASTM 規格の A 212 B 鋼が使用されていた．この鋼材はボイラ用鋼として使用実績が多かった．強度はマンガンを添加することで確保し，かつ溶接性も良好であったが，高温強度が劣るとい欠点があった．この点を改良した A 302 B 鋼がその後使用されるようになったが，これはニッケル(Ni)を添加して鋼板の熱処理特性と衝撃特性とを同時に改良することを意図していた．更にこの A 302 B 鋼は中性子照射ぜい化特性の改良を図るため，製造熱処理を変えた A 533 B 鋼と発展していった．現在では，原子炉圧力容器鋼としてこの A 533 B 鋼がおもに使用されている．

原子炉の大形化に伴って，圧力容器は厚肉でかつ大形となる．原子炉の電気

表 6.1.1　原子炉構造材料とその特性

(1) フェライト鋼

鋼種 JIS	鋼種 ASTM		C	Si	Mn	Ni	Cr	Cu	Mo	V	熱処理**	規格引張強さ(最低)(kg/cm²)	規格降伏強さ(最低)(kg/cm²)	規格伸び(最低)(%)
G 3120 SQV 1	A 302-B A 533*-A	MAX. MIN.	.25 .16	.32 .15	1.55 1.10	.20 —	.15 —	.20 —	.64 .41	— —	N+T Q+T	56	35	18
G 3120 SQV 2	A 302-C A 533*-B	MAX. MIN.	.25 .16	.32 .15	1.55 1.10	.73 .37	.15 —	.20 —	.64 .41	— —	N+T Q+T	56	35	20 18
G 3120 SQV 3	A 302-D A 533*-C	MAX. MIN.	.25 .16	.25 .15	1.55 1.10	1.03 .67	.15 —	.20 —	.64 .41	— —	N+T Q+T	56	35	20 18
G 3212 SFVV 1	A 508 C 1.2	MAX. MIN.	.35 .16	.35 .15	.90 .40	.20 —	.15 —	.20 —	.06 —	0.5 —	Q+T	49	25	20
G 3212 SFVV 2	A 508 C 1.2	MAX. MIN.	.27 .16	.35 .15	.90 .50	.90 .50	.45 .25	.20 —	.75 .55	.05 —	Q+T	56	35	18
G 3212 SFVV 3	A 508 C 1.3	MAX. MIN.	.25 .16	.35 .15	1.50 1.20	.80 .40	.15 —	.20 —	.60 .45	.05 —	Q+T	56	35	18
—	A 508 C 1.4	MAX. MIN.	.23 .10	.30 .10	.40 .20	3.90 2.75	2.00 1.50	.20 —	.60 .40	.03 —	Q+T	74	60	18
—	A 542 C 1.1	MAX. MIN.	.15 .10	.32 .13	.63 .27	.20 —	2.62 1.68	.20 —	1.15 .85	— —	Q+T	74	60	14
—	A 543 C 1.1	MAX. MIN.	.23 .10	.37 .18	.40 .20	3.32 2.53	2.06 1.44	.20 —	.60 .45	.03 —	Q+T	74	60	14

*　A 533 はクラス 1 について示す．**　N：焼ならし，T：焼もどし，Q：焼入れ

(2) ステンレス鋼

鋼種 JIS	鋼種 AISI	C	Cr	Ni	Fe	Mo	Mn	P	S	Si	その他	規格引張強さ(最低)(kg/cm²)	規格耐力(最低)(kg/cm²)	規格伸び(最低)(%)
SUS 304	304	<.08	18.0 ~20.0	8.0 ~12.0	残	—	<2.0	<.045	<.030	<1.0	—	53	21	40.0
SUS 304 L	304 L	<.03	18.0 ~20.0	8.0 ~12.0	残	—	<2.0	<.045	<.030	<1.0	—	49	17.5	40.0
SUS 316	316	<.08	16.0 ~18.0	1.00 ~14.0	残	2.0 ~3.0	<2.0	<.045	<.030	<1.0	—	53	21	40.0

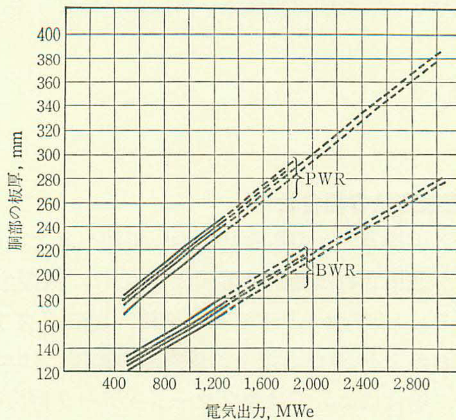


図 **6.1.2** 原子炉圧力容器の肉厚と電気出力との関係

的出力と使用材料の板厚との関係を図示すれば図 **6.1.2** のようになる*.

* Y. Ando : "Fabrication of pressure vessel", Journal of Pressure Vessel Technology, ASME, Feb. 1974.

1973年のアメリカ AEC の規定によれば，単一原子炉の出力は1 300 MWe を超えてはならない．同図によれば，1 300 MWe の原子炉の圧力容器を作る場合，胴部の板厚は PWR で 240 mm, BWR で 170 mm となる．このように使用鋼材の板厚が極厚になった場合，特に配慮しなければならない問題点は次のとおりである．

(1) 板厚方向に，均質な組成と均質な機械的性質が得られるように材料の品質向上を図る．ラミネーション(層状欠陥)などの欠陥がないように注意する．

(2) 原子炉の想定寿命はたとえば40年間という長いものなので，圧力容器の経年変化はほとんど許されない．したがって高温(使用温度)における機械的強度の低下が少ないように注意する必要がある．また使用期間中における材質劣化，特に破壊靭性の低下には注意を要する．

(3) 溶接性や成形加工性についても必要な性能が確保されるよう注意する．特に溶接継手の性能については，母材と同等の性能が要求されるので注意を要する．

(4) 使用鋼材の中性子照射ぜい化は原子炉用鋼に固有な問題であり，注意を要する．鉄鋼材料は約 10^{18}n/cm^2 以上の高速中性子による照射を受けた場合には機械的特性が変化する．その場合，引張強さと降伏応力とは増大するが，伸

びが減少しそのためぜい性破面遷移温度は高温側へ移行する.

6.2 溶接施工

6.2.1 材料と溶接方法の組合せ

原子炉構造材料と溶接方法との組合せについて述べると次のようになる. 炭素鋼と低合金鋼とが使用される個所の溶接としては, 被覆金属アーク溶接(通常手溶接と呼ばれる), サブマージドアーク溶接, 炭酸ガスアーク溶接が主として使用される. おおよそ50 mm以上の厚肉部の溶接にはエレクトロスラグ溶接が採用される. 場合によってはサブマージドアーク溶接の多層盛りになることもしばしばある. オーステナイト系ステンレス鋼については, 被覆金属アーク溶接, サブマージドアーク溶接, イナートガスアーク溶接(TIG溶接, MIG溶接)が主として採用される. その他高温材料としてインコネル, ハステロイなどが使用されるが, それに対しては, 被覆金属アーク溶接, イナートガスアーク溶接が主として使用されている.

溶接方法は一般に, 融接(fusion welding), 圧接(pressure welding), ろう接(brazing)の3種に分けられる. そのいずれを選ぶかについては, 溶接場所の目的, 使用条件, 材料, 寸法, 施工場所などに依存する. 溶接方法のうちで, 原子炉構造物にとって主要なものの内容を以下に説明しよう.

6.2.2 各種溶接方法

(1) 被覆アーク溶接

この方法は通常手溶接と呼ばれており, 簡便な溶接方法として広く採用されているものである. 特に鉄鋼材料に対しては相当以前から使用されている. 被覆アーク溶接の溶接状況を図**6.2.1**に示す.

この溶接方法は原子炉圧力容器などの厚板に対しては, 作業能率が悪かったり, スラグ巻込みなどのために欠陥が生成されやすいので, 適用するのは好ましくない.

(2) サブマージドアーク溶接

溶接状況を図**6.2.2**に示す. 図からわかるように, 裸の電極ワイヤが連続的に送給される. 電極ワイヤと母材との間が粒状フラックスに覆われた状態でア

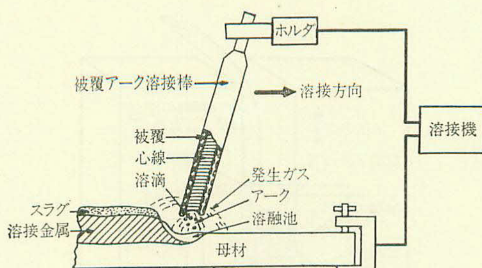


図 6.2.1 被覆アーク溶接

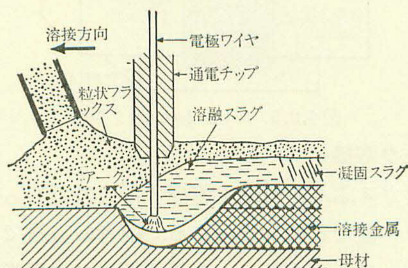


図 6.2.2 サブマージドアーク溶接

ークが発生し，抵抗熱によってワイヤが溶ける．フラックスは溶接に先だって，予想される溶接線上にあらかじめ盛られてある．図に見られる溶融スラグは，溶融金属浴を大気から保護し，フラックスはアーク自身を保護する役目を持っている．

サブマージドアーク溶接では，板厚約 30 mm までは 1 層で溶接することが可能であるが，1 層で溶融する量は，実際の溶接条件によって制限される．

(3) エレクトロスラグ溶接

エレクトロスラグ溶接法は，ソ連のパトン電気溶接研究所で開発された方法であって，厚板の溶接に適している．溶接状況は**図 6.2.3** に示される．溶接姿勢は垂直で開先形状は I 形で間隔は 20～25 mm とするのが普通である．このすきまにフラックスとワイヤを送給する．溶融金属浴と溶融スラグ浴は，水冷した摺動板によって両端から強制冷却されている．この摺動板は，ワイヤ送給ガイドとともに移動するようになっている．溶接電流がスラグ浴を流れることによって生じる抵抗熱のために，母材とワイヤとが溶融される．溶接作業中ときどきフラックスを添加してスラグ浴の深さをほぼ一定に保つ必要がある．

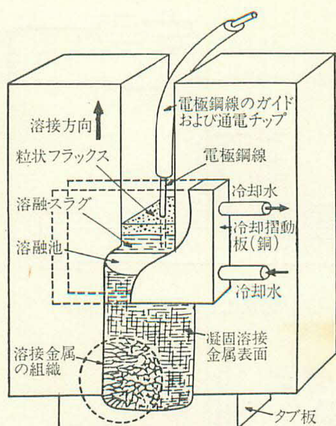


図6.2.3 エレクトロスラグ溶接

(4) ガス被包アーク溶接

この方法は，保護ガスふん囲気中で溶接するものであって，非消耗電極アーク法や消耗電極アーク法などに分けられる．前者の方法では，タングステン電極を用いてヘリウム，アルゴンといった不活性ガスに保護された中で溶接される．これは TIG 溶接法(tungsten electrode inert gas welding)と呼ばれ，1942年にアメリカの Linde 社で実用化された．後者の方法は MIG 溶接法(metal electrode inert gas welding)と呼ばれ，1948年に実用化されたものである．**図6.2.4**に示すように，溶接装置は電極ワイヤとそのリール，送給ロール，溶接トーチ，不活性ガスの送給装置などから成っている．溶接トーチにはワイヤに通電する銅製チップが付いている．アルミニウム，合金鋼の場合には，直径1.2～2.4 mm のワイヤが普通用いられる．交流電源の場合にはアークが乱れて満足なビードが得られないので，直流逆極性の溶接電源を用いる．TIG 法は通常板厚が 0.6～3 mm の薄板の溶接に適しているが，MIG 法は 3 mm 以上の板の溶接に適している．

一般的には，フラックスが不要でかつ全姿勢での溶接が可能であるなどの利点があるが，炭素鋼や低合金鋼に対してはあまり経済的でないためにほとんど使用されない．アルミニウム，チタン，マグネシウムといった非鉄材料に主として使用されているのが実状である．

(5) クラッド溶接

腐食防止のため，容器内面を防錆鋼でもあるオーステナイト系ステンレス鋼

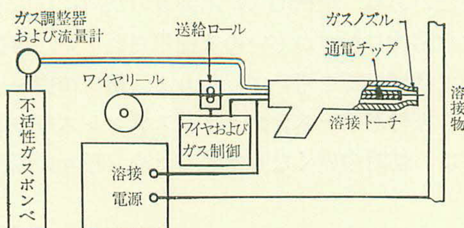


図 **6.2.4**　MIG 溶接

で肉盛溶接(クラッド溶接)することが往々にして必要になる．クラッド溶接方法としては，圧延時にクラッドしたり，爆着でクラッドしたり，あるいは，サブマージドアーク溶接などで肉盛したりする方法があるが，極厚の圧力容器の場合には肉盛溶接がほとんど行われる．肉盛溶接の場合には，板材は曲げ加工前でも後でも実施することが可能である．平板の状態で肉盛溶接されるのは，加工後の溶接が非常に困難か経済的に高くつく場合である．また円胴部については平板の状態より円胴の状態で溶接したほうが好ましい．

肉盛溶接法には，通常 2 通りの方法がある．施工が容易であることと費用があまりかからないという理由のため，広幅心線を用いたサブマージドアーク溶接はしばしば用いられる．心線幅は普通 60 mm で，厚さは 0.5 mm である．直流 800 A で溶接速度が 12～15 cm/min の場合には，1 パスの溶着金属は 50 mm 幅でかつ 3 mm 厚となる．

6.3 製　　作

圧力容器を製造するためには，多くの工程を消化する必要がある．先に述べたように，材料選定から始まって，溶接・加工・組立・検査などの工程を経て完成する．そのすべてについて詳述することは限られた紙数の中ではできないことなので，ここでは主として加工について述べて第 6 章の製造を終わることにする．

6.3.1　鋼材の加工

容器製造者は，製鉄メーカーから受け取った鋼板を必要に応じて切断・加工する必要がある．板取りの方法については，機械的切断，ガス切断，プラズマ

アーク切断の3方法がある．機械的切断は薄板の切断には広く採用されているが，厚板の切断は技術的にむずかしいので使用されない．溶接のための開先加工などは，主として機械切断を用いて行われる．特に精度を出す必要がある場合には有用である．板材がオーステナイト系ステンレス鋼の場合には，加工硬化度が大きいために，切断中硬くなりすぎるため，種々の障害が生じるので注意を要する．

ガス切断はコストが安く，板材をセットし直す必要がないなど利点が多い．たとえば，板材の四辺を切断するときには，四つのトーチを使って平行方向にそれを動かして切断すれば，簡便でかつ能率的である．低合金鋼の板材をガス切断する場合には，切断部におけるクラックの発生を防止するため，切断前に予熱を施すことが重要である．予熱は普通バーナを使用して行われる．ガス切断後，冷間加工(加熱しないで曲げ加工などを行うこと)を受ける場合には，切断面およびその熱影響部のかたさの上昇に特に注意する必要があろう．予熱温度なしの場合にはかたさは410(VDH)あったものが，150°Cの予熱を行ってガス切断をすると，かたさは305と低下する．これを見ても予熱することの有効性がわかる．

ステンレス鋼の場合には，普通のガス切断はあまり適用されない．鋼中に含まれるCr成分が容易に酸化されて酸化クロムとなるため切断面はきたない．この点を改良したものがプラズマアーク切断である．その原理を図**6.3.1**に示す．200V程度の電圧を掛けてアークをタングステン電極と板材との間に飛ば

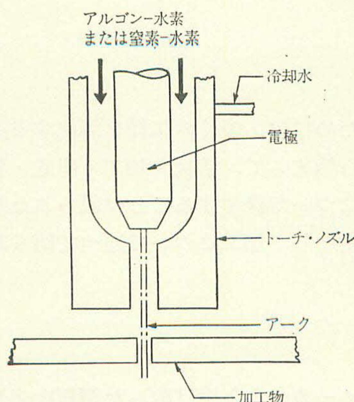


図6.3.1　プラズマアーク切断の原理

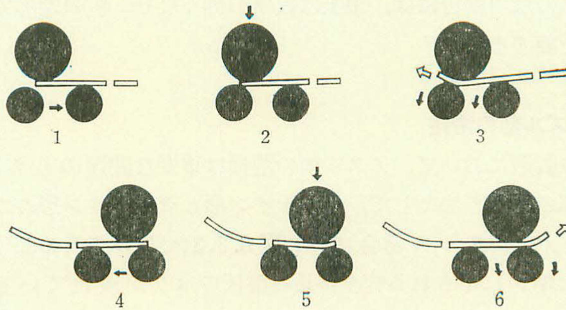


図 **6.3.2**　ロールによる板の加工

し，それで板を切断するのである．つまりアルゴンまたはアルゴン－水素のような不活性ガスをアーク中に飛ばし，不活性ガスをイオン化する．高温に加熱されたガスが加工物と激しく衝突することにより，熱源が板材に与えられることになるのである．

板材を加工してシリンダ状にするときには，ローラが用いられる．ロールによる加工手順を図 **6.3.2** に示す．そこにはピラミッド形に配置されたローラが3本見える．上のローラは垂直方向に移動可能であって，その量は板材の厚さと胴径とに依存する．これ自体は駆動しない．下の2本のローラは水平方向に移動可能であって，それ自体が回転して板を送る機能を持つ．この装置を使用すれば，一度の加熱だけで板の両端部がほとんど接触する程度まで円筒状に加工することが可能であり，このことは大きな利点である．

熱間加工の場合には，炉内で生成されるスケールのため板厚が減少することを勘定に入れておく必要がある．その量は温度と加熱時間に依存するが，補うべき板厚減少量は普通2～3 mm 程度である．

厚板の冷間加工については，外表面の伸びに注意を払う必要がある．曲げ試験において得られる伸びは30～50% であっても，実際の厚板の場合には横方向の拘束が大きいために，得られる伸びは小形試験片のそれより小さい．そのことを無視して冷間加工を行えば，割れが発生する．実際上許容できる伸びは4～5%程度であるといわれている．

鏡板の成形加工は，薄板の場合には冷間スピニングが普通採用され，厚板の場合には熱間スピニングが採用される．更に厚い鏡板の場合には，熱間プレスが適用される．極厚の鏡板の場合には，数板のペタルを溶接して製作する必要

がある．半球の鏡の場合には，頂上は板厚が薄くなり，板の端部では厚くなることに注意を要する．

6.3.2　ノズル部の溶接

圧力容器の製造において，ノズル部の溶接は重要な問題のうちの一つに入る．ノズル部の溶接方法として，セットイン形とセットオン形の二つの方法がある．セットインノズルの場合には，図6.3.3(a)に示される部分溶込み溶接よりも図6.3.3(b)に示される完全溶込み溶接のほうが優れている．部分溶込み溶接は普通は手溶接によって行われるので，溶接部にルート割れが生じやすいから注意を要する．また，溶接ルート部が幾何学的に不連続となるので応力集中が生じやすく，外荷重や熱応力の負荷によってき裂が発生しやすいという欠点がある．完全溶込み溶接は自動溶接が可能なので能率の点から好ましいが，厚材の場合には溶接金属にかかる拘束力はかなり高いので，溶接割れが防止できる溶接材料および溶接方法に関しては現在も研究が続けられている．図6.3.3(c)に示したセットオン形式の完全溶込み溶接は，拘束力を少なくする意味において推奨されることがある．その溶接を手溶接で行う場合，溶接技能士

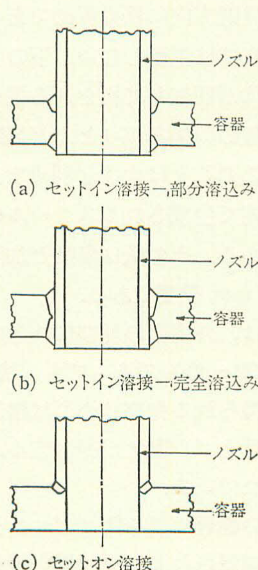


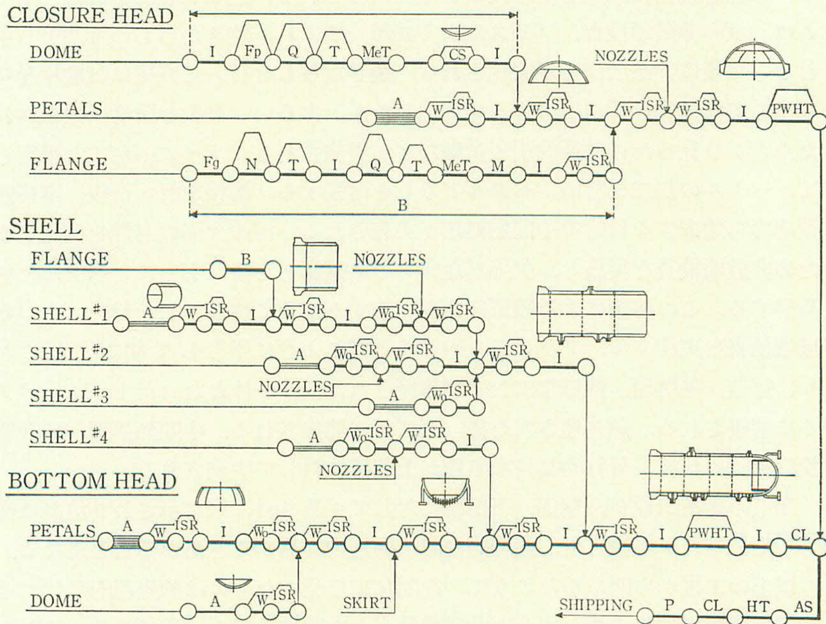
図6.3.3　ノズル部の溶接形式

が容器の内側で溶接する必要がないのはたいへん楽である．というのは，容器の内側は予熱作業のため高温になっているのが普通であり，溶接技能士にとって過酷な環境となっているからである．

6.3.3　原子炉製造工程

原子炉圧力容器の製造工程の例を図 **6.3.4** に示す．これは沸騰水形原子炉についての工程である．

圧力容器は大別して上部鏡(closure head)，下部鏡(bottom head)と胴部(shell)とに分けられる．それはまた次のような各部材から主として溶接によっ



記号の意味

I：非破壊検査
A：板の成形加工
B：鍛造による成形
Q：焼き入れ
N：焼準
T：焼きならし
ISR：中間応力除去焼鈍
PWHT：後熱処理
M：機械加工
P：塗装
MeT：材料試験
Fg：鍛造
CS：寸法どり
CL：清浄作業
W　：溶接
HT：水圧テスト
Fp　：プレス加工
AS：組立
Wo：肉盛溶接

図 6.3.4　原子炉の製造工程(BWR)

て組み立てられる．

(1) 上部鏡 { ドーム / ペタル / フランジ }

(2) 胴　部 { フランジ / 複数のシェル(図6.3.4では4体) }

(3) 下部鏡 { ドーム / ペタル }

上部鏡については，ドーム，ペタル，フランジはそれぞれ平行に製作されはじめ，工程を適当に調整して溶接によって結合される．図6.3.4によれば，ドームは，板の非破壊検査，プレスによる成形，焼入れ，焼きならし，寸法どりを行なった後に非破壊検査が実施される．焼きならしを行った直後に試験片を切り出して機械的性質がどのように変化したか，あるいは必要な強度が確保されたか否かを見るために静的引張試験などが実施される．ドームの加工と平行して，ペタルの加工を行い，ペタルどうしを溶接する．溶接を行った後，溶接残留応力を除去する目的で中間熱処理が実施される．溶接欠陥の有無を確認するため非破壊検査を実施し，欠陥がないことを確認した後，ドームとペタルとを溶接する．この溶接による残留応力を除去するために焼なましを行い，かつ非破壊検査を実施する．フランジもペタルと同じように平行して加工されており，鍛造，熱処理，機械加工および溶接された後，一体となったドーム，ペタルに溶接される．熱処理された後，ノズルが溶接される．中間熱処理，非破壊検査を受けた後，最終的な後熱処理が上部鏡に対して実施される．

類似の製造工程が，胴部，下部鏡に対しても施され，図に示される流れに従ってそれぞれが溶接され，最終的な原子炉圧力容器ができあがることになる．

以上の工程から明らかなように，冷間加工を受けたものは熱処理を受け，溶接部は残留応力除去焼なましと非破壊検査とを受けるのが一般である．これらのたび重なる熱処理によって材質が劣化することに注意する必要があり，そのために同様の熱処理を受けた余材から試験片を切り出して静的強度，衝撃値の変化を知るために材料試験が実施される．

完成した圧力容器は現地にすえ付けられる前に，水圧テストを行って，漏れと強度とを確認する．

参考文献

(1) R. W. Nichols : "Pressure vessel engineering technology", Elsevier Publishing Company Ltd., 1971.
(2) 村主　進：原子炉安全工学，日刊工業新聞，昭和50年.
(3) 日本金属学会："金属便覧"，丸善，昭和46年.
(4) 稲垣，三山，山本：機械・原子炉，日刊工業新聞，昭和38年.

索　　引

シ

ス

セ

ソ

タ

チ

ツ

リ

ル

レ

ロ

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

R

S

T

V

W

Y

Z

著者略歴

宮 健 三（みや けんぞう）

1940年　長崎に生れる
1969年　東京大学大学院工学系研究科(原子力工学専攻）博士課程修了
現　在　東京大学工学部原子力工学研究施設助教授　工学博士
訳　書　R. W. ニコルズ『圧力容器工学』(産報，共訳)

矢川元基（やがわ げんき）

1942年　福岡に生れる
1970年　東京大学大学院工学系研究科(原子力工学専攻）博士課程修了
現　在　東京大学工学部原子力工学科助教授　工学博士
訳　書　R. W. ニコルズ『圧力容器工学』(産報，共訳)，O. C. ツィエンキーヴィッツ『基礎工学におけるマトリックス有限要素法』・J. S. シェムニスキー『マトリックス構造解析の基礎理論』(培風館，共訳)ほか

原子炉構造工学

1976年10月31日　発　行



© 著　者　宮　健三
　　　　　矢川元基

発行者　加藤一郎

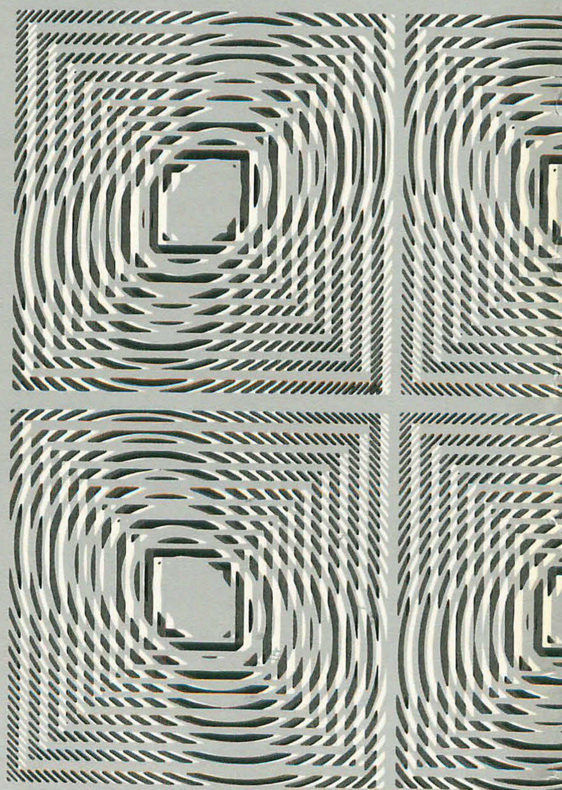
発行所　財団法人　東京大学出版会

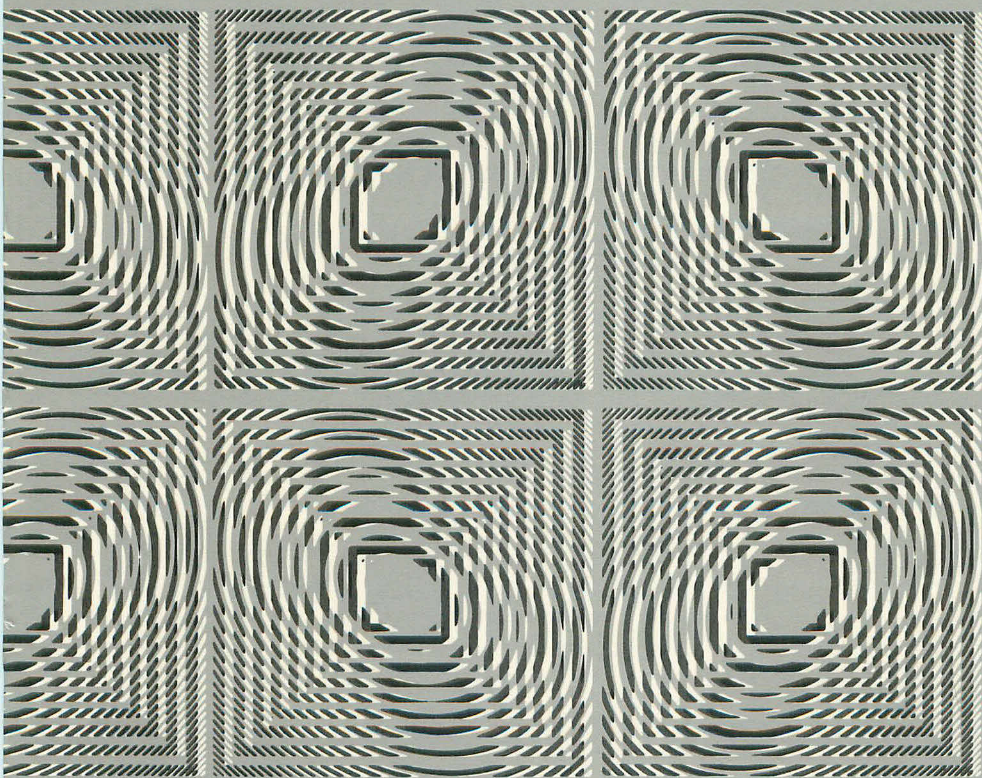
113　東京都文京区本郷　東大構内　電話(811)8814・振替東京6-59964

理想社印刷・新栄社製本

3358-64167-5149

```
      ENIENI
ENIENIHOZHOZ
HOZHOZNMONMO
NMONMOOI∃OI∃
OI∃OI∃MZHMZH
MZHMZHIONION
IONIONZ∃OZ∃O
Z∃OZ∃OOHWOHW
OHWOHW∃NI∃NI
∃NI∃NIHOZHOZ
HOZHOZNWONWO
NWONWOOIEOIE
OIEOIEWZHWZH
WZHWZHIONION
IONIONZEOZEO
ZEOZEO
```





3358-64167-5149

¥2500